漸化式 タイプ 9　$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$　(p, q は定数)　1/2

特定方程式の解が異なる２つの実数解の時は、解を活用しての漸化式の変形は２通りである。

9.1　$a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $2(4a_{n+2} + a_{n+1}) = 3a_n$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　第３項 a_3 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

[解] (1)　$8a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \cdots$ ①

$n = 1$ を①に代入すると

$8a_3 + 2a_2 - 3a_1 = 0$

これに $a_1 = 4$, $a_2 = 3$ を代入して

$8a_3 + 2 \times 3 - 3 \times 4 = 0 \quad \therefore a_3 = \frac{3}{4} \cdots$(答)

特定方程式

$8x^2 + 2x - 3 = 0$

$\therefore (2x - 1)(4x + 3) = 0$

$\therefore x = \dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{3}{4}$

（異なる２つの実数解）

(2)　①は次の２通りに変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2} - \dfrac{1}{2}a_{n+1} = -\dfrac{3}{4}\left(a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n\right) & \cdots\cdots\cdots ② \\ a_{n+2} - \left(-\dfrac{3}{4}\right)a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left\{a_{n+1} - \left(-\dfrac{3}{4}\right)a_n\right\} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②において、$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = b_n$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1} = -\dfrac{3}{4}b_n \\ b_1 = a_2 - \dfrac{1}{2}a_1 = 3 - \dfrac{1}{2} \times 4 = 1 \end{cases}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 1、公比 $-\frac{3}{4}$ の等比数列である。

$$\therefore b_n = 1 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ④$$

③において、$a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n = c_n$ とおくと

$$\begin{cases} c_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n \\ c_1 = a_2 + \dfrac{3}{4}a_1 = 3 + \dfrac{3}{4} \times 4 = 6 \end{cases}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 6、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$$\therefore c_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ − ④

$$\frac{5}{4}a_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{4}{5}\left\{6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\} \cdots\cdots \text{（答）}$$

漸化式 タイプ 9 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ （p, q は定数） 2/2

特定方程式の解が重解のときは、その解を活用しての漸化式の変形は１通りである。

9.2 $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $4a_{n+2} + 9a_n = 12a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の各問に答えよ。

(1) 数列 $\{a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ。

[解] (1) $4a_{n+2} - 12a_{n+1} + 9a_n = 0$

特定方程式

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$\therefore (2x-3)^2 = 0$$
$$x = \frac{3}{2} \quad （重解）$$

これを変形すると

$$a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1} = \frac{3}{2}\left(a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n\right)$$

$a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = b_n$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1} = -\frac{3}{2}b_n \\ b_1 = a_2 - \frac{3}{2}a_1 = 4 - \frac{3}{2} \times 3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列で、一般項は

$$b_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad である。$$

ゆえに、数列 $\left\{a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n\right\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列である。

(2) (1) の結果から

$$\therefore a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \Longleftarrow （タイプ４）$$

両辺を $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} - \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

ここで、$\frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = c_n$ とおくと

$$\begin{cases} c_{n+1} - c_n = -\frac{2}{9} \\ c_1 = \frac{a_1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2 \end{cases}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 2、公差 $-\frac{2}{9}$ の等差数列である。

$$\therefore c_n = 2 + (n-1)\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{2(10-n)}{9}$$

$$\therefore \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{2(10-n)}{9} \qquad \therefore a_n = \frac{2(10-n)}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{3^{n-2}(10-n)}{2^{n-1}} \quad \cdots\cdots （答）$$