漸化式 タイプ $9'$ 　$a_1 = a_2 = 1\ ,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

「フィボナッチの数列」 といって、自然界の研究に活用されている有名な数列である。

9.3 　$a_1 = 1\ ,\ a_2 = 1\ ,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解] 　$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \ \cdots$ ①

特定方程式

$x^2 - x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

①は次の２通りに変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right) \cdots\cdots\cdots ② \\ a_{n+2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right) \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②において、$a_{n+1} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n = b_n$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b_n \\ b_1 = a_2 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_1 = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \times 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 、公比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列である。

$$\therefore b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots\cdots ④$$

③において、$a_{n+1} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n = c_n$ とおくと

$$\begin{cases} c_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}c_n \\ c_1 = a_2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_1 = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \times 1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 、公比 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列である。

$$\therefore c_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots\cdots ⑤$$

④−⑤

$$\sqrt{5}a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

9.4　$a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる

数列 $\{a_n\}$ の一般項は、次の式で表せることを示せ。

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

《注意》 前問 9.3 と同じ解法でもよいが、結果が判っている場合は、数学的帰納法で解いてもよい。

[解] $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\cdots$ ①

(1)　$n=1$ のとき　$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{2}=1$

$n=2$ のとき $a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=1$

よって　$n=1,\ n=2$ のとき　① はなりたつ。

(2)　$n=k,\ n=k+1$ のとき　① が成り立つとすると

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\}$$

$$a_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}$$

$\therefore a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}+2}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right\}$$

よって　$n=k+2$ のときも ① は成り立つ。

(3) したがって (1), (2) から数学的帰納法によって、すべての自然数 n につおて　① は成り立つ。

9.5　数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の一般項が、次の式で表せるとき、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

すべての自然数 n について、a_n は自然数であることを示せ。

[解] (1)　$n=1$ のとき　$a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{2} = 1$

$n=2$ のとき $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5} = 1$

よって　$n=1,\ n=2$ のとき　$a_1,\ a_2$ は自然数である。

(2)　$n=k,\ n=k+1$ のとき　$a_k,\ a_{k+1}$ が自然数、すなわち、

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\}$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}$$

が自然数であるとき、

$$a_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}$$

$$\quad - \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$= a_{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\cdot\frac{1-5}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\cdot\frac{1-5}{4}\right\}$$

$$= a_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right\}$$

$$= a_{k+1} + a_k$$

よって、a_{k+2}　も自然数である。

(3)　したがって (1), (2) から数学的帰納法によって、すべての自然数 n について a_n は自然数である。