漸化式　タイプ　６　$a_{n+1} = q\, {a_n}^p$　（ $p,\ q$ は定数 ）

1/2

漸化式　タイプ６　の両辺が正であることを確認し、両辺の対数をとってみること。

6.1　$a_1 = 10$, $\dfrac{a_{n+1}}{{a_n}^2} = 100$ という関係が与えられている。

この数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

[解]　$a_1 = 10$, $a_{n+1} = 100\, {a_n}^2$

これより、 $a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから

両辺の常用対数をとると、

$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} 100\, {a_n}^2$

$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} 10^2 + \log_{10} {a_n}^2$

$\log_{10} a_{n+1} = 2\, \log_{10} 10 + 2\, \log_{10} a_n$

$\log_{10} a_{n+1} = 2\, \log_{10} a_n + 2$

$\log_{10} a_n = b_n$ とおくと、

$b_{n+1} = 2\, b_n + 2\ \cdots$ ①

$\alpha = 2\, \alpha + 2\ \cdots$ ②

とおくと、　$\alpha = -2$　　$\Longleftrightarrow$　①を変形して、

①−②

$b_{n+1} - \alpha = 2(b_n - \alpha)$

$\therefore b_{n+1} + 2 = 2(b_n + 2)$

$b_n + 2 = c_n$ とおくと、

$$\begin{cases} c_{n+1} = 2\, c_n \\ c_1 = b_1 + 2 = \log_{10} a_1 + 2 = \log_{10} 10 + 2 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項３、公比２の等比数列である。

$\therefore c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore b_n + 2 = 3 \cdot 2^{n-1}$　　　$\therefore b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$

$\therefore \log_{10} a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$

$\therefore a_n = 10^{3 \cdot 2^{n-1} - 2}$　$\cdots$　(答)

漸化式　タイプ　6　$a_{n+1} = q\,{a_n}^p$　（$p,\ q$ は定数）

漸化式　タイプ６　の両辺が正であることを確認し、両辺の対数をとってみること。

6.2　数列 $\{a_n\}$ が　$a_1 = 3$ ，$a_n = 3\sqrt{a_{n-1}}$　$(n \geqq 2)$

で定義されるとき、　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

[解]　$a_1 = 3$ ，$a_n = 3\sqrt{a_{n-1}}$　$(n \geqq 2)$

$\therefore a_n = 3 \cdot {a_{n-1}}^{\frac{1}{2}}$

これから、$a_n > 0$　$(n = 2, 3, 4, \cdots)$ であるから

両辺の底を３とする対数をとると、

$\log_3 a_n = \log_3 (3 \cdot {a_{n-1}}^{\frac{1}{2}})$

$\log_3 a_n = \log_3 3 + \frac{1}{2}\log_3 a_{n-1}$

$\log_3 a_n = \frac{1}{2}\log_3 a_{n-1} + 1$

$\log_3 a_n = b_n$ とおくと、

$b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + 1 \cdots$ ①

$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1 \cdots$ ②

とおくと、　$\alpha = 2$

① − ②

$b_n - \alpha = \frac{1}{2}(b_{n-1} - \alpha)$

$\Longleftrightarrow$　① を変形して、

$\therefore b_n - 2 = \frac{1}{2}(b_{n-1} - 2)$

$b_n - 2 = c_n$ とおくと、

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}\,c_n \\ c_1 = b_1 - 2 = \log_3 a_1 - 2 = \log_3 3 - 2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 -1 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$\therefore c_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　　$\therefore b_n - 2 = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore b_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　　$\therefore \log_3 a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n = 3^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$　$(n \geqq 1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 3^{2-0} = 9 \cdots$ (答)