漸化式　タイプ　1　$a_{n+1} = a_n + f(n)$　1/3

漸化式を適当に変形または置換して、タイプ　1　の形にし、階差数列をつくる。

1.1　数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 0$, $n^2 a_{n+1} = (n+1)^2 a_n + 2n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

で定義されている。

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{a_n}{n^2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義するとき、隣接する 2 項

b_n , b_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) a_n を n で表せ。

[解]　(1)　$n^2 a_{n+1} = (n+1)^2 a_n + 2n + 1$

この両辺を $n^2(n+1)^2$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{a_n}{n^2} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$b_{n+1} = \dfrac{a_n}{n^2}$ とおくと　　$\therefore b_{n+1} = b_n + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $\cdots$ (答)

(2)　(1) の結果より

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\left\{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right\}$ であるから、

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$= b_1 + \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left\{\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right\}$$

$$= \frac{a_1}{1^2} + 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore b_n = \frac{n^2-1}{n^2}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$\therefore b_n = \dfrac{n^2-1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$　　$\therefore \dfrac{a_n}{n^2} = \dfrac{n^2-1}{n^2}$

$\therefore a_n = n^2 - 1 \quad \cdots \quad$ (答)

漸化式　タイプ　1　　$a_{n+1} = a_n + f(n)$　　2/3

漸化式を適当に変形または置換して、タイプ　1　の形にし、階差数列をつくる。

1.2　数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = \dfrac{1}{12}$, $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n-1}} = 6(n^2 + n)$　$(n = 2, 3, \cdots)$

で定義されている。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

[解]　(1) $a_1 = \dfrac{1}{12}$,　$\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n-1}} = 6(n^2 + n)$　$(n \geqq 2)$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと、　$b_1 = 12$,　$b_n - b_{n-1} = 6(n^2 + n)$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = 6\{(n+1)^2 + (n+1)\} = 6(n^2 + 3n + 2)$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{\ 6(n^2 + 3n + 2)\ \}$ であるから、

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6(k^2 + 3k + 2) = 12 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 18\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 12$$

$$= 12 + 6 \times \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 18 \times \frac{1}{2}n(n-1) + 12 \times (n-1)$$

$$= 2n^3 + 6n^2 + 4n = 2n(n+1)(n+2) \qquad \therefore b_n = 2n(n+1)(n+2)$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\therefore b_n = 2n(n+1)(n+2)\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \therefore a_n = \frac{1}{2n(n+1)(n+2)} \quad \cdots \quad (答)$$

(2)　$a_k = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} = \frac{1}{8} \ \cdots\ (答)$$

漸化式　タイプ　1　　$a_{n+1} = a_n + f(n)$　　3/3

漸化式を適当に変形または置換して、タイプ　1　の形にし、階差数列をつくる。

1.3　$a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　a_n が最小になるときの n と a_n の値を求めよ。

[解]　(1) $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$

$(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 2^n$

$a_{n+1} - a_n = b_n \cdots$ ①　とおくと、　$b_{n+1} - b_n = 2^n$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{\ 2^n\ \}$ であるから、

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = (a_2 - a_1) + \sum_{k=1}^{n-1} = (-1-0) + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$= -1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 3 \qquad \therefore b_n = 2^n - 3$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\therefore b_n = 2^n - 3 \quad (n{=}1, 2, 3, \cdots)$$

① から、数列 $\{b_n\}$ が数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから、

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k - 3) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1} 3$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) - 3(n-1)$$

$$= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - 3(n-1) = 2^n - 3n + 1 \qquad \therefore a_n = 2^n - 3n + 1$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\therefore a_n = 2^n - 3n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \quad \text{(答)}$$

(2)　(1) の結果より　$a_{n+1} - a_n = b_n = 2^n - 3$　であるから

$$a^{n+1} \ \gtrless \ a_n \iff 2^n \ \gtrless \ 3 \qquad \therefore a_1 > a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$$

よって、a_2 が最小である。　このとき、$n = 2$, $a_2 = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$

（答） a_n の最小値 -1 ($n = 2$ のとき)