漸化式 タイプ １３ ベクトルへの応用

見掛けが、ベクトルでも漸化式の考えを用いると巧く解決することができる。

13.1 平面上の点 ; $X_n(n=0,1,2,\cdots)$ を、ベクトル $\overrightarrow{a}=(2,2), \overrightarrow{b}=(0,-1), \overrightarrow{c}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ を用いて、次のように定める。

X_0 は原点 , $\overrightarrow{X_0X_1}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{X_1X_2}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{X_2X_3}=\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{X_nX_{n+1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{n-3}X_{n-2}}$ $(n=3,4,5,\cdots)$。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) $X_1, X_4, X_7, \cdots, X_{3n+1}, X_{3n+4}, \cdots$ は同一直線上にあることを示せ。

(2) X_{3n+1} $(n=0,1,2,\cdots)$ の座標を求めよ。

[解] (1) $\overrightarrow{X_nX_{n+1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{n-3}X_{n-2}}$ から、 $n \geqq 1$ のとき

$$\overrightarrow{X_{3n+1}X_{3n+4}}=\overrightarrow{X_{3n+1}X_{3n+2}}+\overrightarrow{X_{3n+2}X_{3n+3}}+\overrightarrow{X_{3n+3}X_{3n+4}}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{3n-2}X_{3n-1}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{3n-1}X_{3n}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{3n}X_{3n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{X_{3n-2}X_{3n-1}}+\overrightarrow{X_{3n-1}X_{3n}}+\overrightarrow{X_{3n}X_{3n+1}}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{3n-2}X_{3n+1}}$$
$$\therefore \overrightarrow{X_{3n+1}X_{3n+4}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{3n-2}X_{3n+1}} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

したがって、３点 x_{3n-2} , X_{3n+1} , X_{3n+4} $(n=1,2,\cdots)$ は同一直線上にある。

よって、X_1, X_4, X_7, $\cdots$, X_{3n-2}, X_{3n+1}, X_{3n+4} はすべて同一直線上にある。

(2) $n \geqq 1$ のとき、① から

$$\overrightarrow{X_4X_7}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_1X_4}$$
$$\overrightarrow{X_7X_{10}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_4X_7}$$
$$\overrightarrow{X_{10}X_{13}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_7X_{10}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overrightarrow{X_{3n-5}X_{3n-2}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{3n-8}X_{3n-5}}$$
$$\overrightarrow{X_{3n-2}X_{3n+1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{3n-5}X_{3n-2}}$$

これらを辺々掛けて整理すると

$$\overrightarrow{X_{3n-2}X_{3n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\overrightarrow{X_1X_4}$$

したがって、

$$\overrightarrow{X_{3n-2}X_{3n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\overrightarrow{X_1X_4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\overrightarrow{X_1X_2}+\overrightarrow{X_2X_3}+\overrightarrow{X_3X_4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\overrightarrow{X_1X_2}+\overrightarrow{X_2X_3}+\frac{1}{2}\overrightarrow{X_0X_1}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{a}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{(0,-1)+(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(2,2)\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(3,-1)$$

また、$\overrightarrow{X_0X_1}=\overrightarrow{a}=(2,2)$

$$\therefore \overrightarrow{X_0X_{3n+1}}=\overrightarrow{X_0X_1}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{X_{3k-2}X_{3k+1}}=(2,2)+\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}(3,-1)$$
$$=(2,2)+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-(\frac{1}{2})^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}(3,-1)=(2,2)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(3,-1)=\left(5-\frac{3}{2^n},1+\frac{1}{2^n}\right)$$

この結果は $n=0$ のときも成り立ち、 X_0 は原点だから、X_{3n+1} の座標は

$$\left(5-\frac{3}{2^n},1+\frac{1}{2^n}\right)\cdots\cdots(答)$$