漸化式 タイプ １１ 類推し、数学的帰納法を利用　1/2

解法のパターンが思い出せない時は、一般項を推定し数学的帰納法で証明すること。

11.1　$a_1 = \dfrac{1}{4}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ $(n \geqq 1)$ 定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　a_2 , a_3 , a_4 を計算し、一般項 a_n を推定せよ。

(2)　数学的帰納法を用いて、(1) の推定が正しいことを証明せよ。

[解] (1)　$a_1 = \dfrac{1}{4}$ より　$a_2 = \dfrac{1}{2 - a_1} = \dfrac{1}{2 - \frac{1}{4}} = \dfrac{4}{7}$

$a_3 = \dfrac{1}{2 - a_2} = \dfrac{1}{2 - \frac{4}{7}} = \dfrac{7}{10}$　　$a_4 = \dfrac{1}{2 - a_3} = \dfrac{1}{2 - \frac{7}{10}} = \dfrac{10}{13}$

この数列 $\{a_n\}$ の分子の数列 $1, 4, 7, 10, \cdots$ は初項 1、公差 3 の等差数列であるから、
分子の第 n 項は $1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$ であり、
分母の第 n 項は $(3n - 2) + 3 = 3n + 1$ である。
よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は次のように推定できる。

$$a_n = \frac{3n - 2}{3n + 1} \cdots\cdots (答)$$

(2)　$a_n = \dfrac{3n - 2}{3n + 1} \cdots\cdots$①

これを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{3 \times 1 - 2}{3 \times 1 + 1} = \frac{1}{4}$$

よって、$n = 1$ のとき①は成り立つ。

[2]　$n = k$(k は自然数) のとき、①が成り立つと仮定すると

$$a_k = \frac{3k - 2}{3k + 1}$$

$n = k + 1$ のときを考えると

$$a_{k+1} = \frac{1}{2 - a_k} = \frac{1}{2 - \dfrac{3k - 2}{3k + 1}} = \frac{3k + 1}{2(3k + 1) - (3k - 2)} = \frac{3k + 1}{3k + 4}$$

$$\therefore a_{k+1} = \frac{3(k + 1) - 2}{3(k + 1) + 1}$$

よって、$n = k + 1$ のときも①は成り立つ。

[3]　したがって、数学的帰納法によって、すべての自然数 n について①は成り立つ。

漸化式 タイプ １１ 類推し、数学的帰納法を利用 2/2

解法のパターンが思い出せない時は、一般項を推定し数学的帰納法で証明すること。

11.2 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{na_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) a_2 , a_3 , a_4 を計算し、一般項 a_n を推定せよ。

(2) 数学的帰納法を用いて、(1) の推定が正しいことを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n a_{n+1} a_{n+2}\cdots a_{2n}\right)^{4n}$ を求めよ。

[解] (1) $a_1 = 2$ より $a_2 = 1 + \dfrac{1}{1\cdot a_1} = 1 + \dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{3}{2}$,

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2\cdot a_2} = 1 + \frac{1}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\ , \qquad a_4 = 1 + \frac{1}{3\cdot a_3} = 1 + \frac{1}{3\times\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は次のように推定できる。

$$a_n = \frac{n+1}{n} \cdots\cdots(答)$$

(2) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ $\cdots\cdots$①

これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n = 1$ のとき $a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$

よって、 $n = 1$ のとき①は成り立つ。

[2] $n = k$(k は自然数) のとき、①が成り立つと仮定すると

$$a_k = \frac{k+1}{k}$$

$n = k + 1$ のときを考えると

$$a_{k+1} = 1 + \frac{1}{ka_k} = 1 + \frac{1}{k\times\frac{k+1}{k}} = 1 + \frac{1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

$$\therefore a_{k+1} = \frac{(k+1)+1}{k+1}$$

よって、$n = k + 1$ のときも①は成り立つ。

[3] したがって、数学的帰納法によって、すべての自然数 n について①は成り立つ。

(3) $$\left(\frac{1}{2}a_n a_{n+1} a_{n+2}\cdots a_{2n}\right)^{4n} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdots\frac{2n+1}{2n}\right)^{4n}$$

$$= \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{4n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n} = \left\{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^2$$

注意
e は自然対数の底で
$\displaystyle\lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$

ここで、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$ であるから

$$\therefore \lim_{h\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n a_{n+1} a_{n+2}\cdots a_{2n}\right)^{4n} = \lim_{h\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^2 = e^2 \cdots\cdots(答)$$