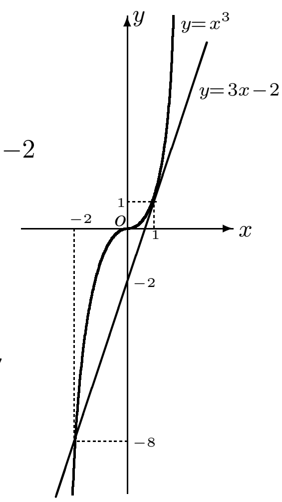
積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　解答例　($No.5$)

1. 曲線 $y=x^3$ 上の点 $(1,1)$ における接線を引くとき、この曲線と接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

（解）$y'=3x^2$　$\therefore [y']_{x=1}=3\cdot 1^2=3$　よって、接線の方程式は　$y-1=3(x-1)$　$\therefore y=3x-2$

$\begin{cases} y=x^3\cdots\cdots① \\ y=3x-2\cdots② \end{cases}$　①, ②から　$x^3=3x-2$　$\therefore x^3-3x+2=0\cdots\cdots③$



①と②は $x=1$ に対応する点で接するから、③は $x=1$ を重解にもつ。

よって、左辺を因数分解すると、　$(x-1)^2(x+2)=0$　$\therefore x=1$ (重解), $x=-2$

$$S=\int_{-2}^{1}\left\{x^3-(3x-2)\right\}dx=\left[\ \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\ \right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ x^4\ \right]_{-2}^{1}-\frac{3}{2}\left[\ x^2\ \right]_{-2}^{1}+2\left[\ x\ \right]_{-2}^{1}$$

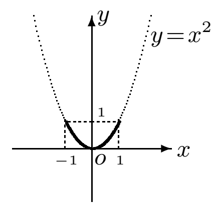
$$=\frac{1}{4}(1-16)-\frac{3}{2}(1-4)+2(1+2)=-\frac{15}{4}+\frac{9}{2}+6=-\frac{15}{4}+\frac{18}{4}+\frac{24}{4}=\frac{27}{4}\quad〃$$

2. 曲線 $y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ の長さを求めよ。

（解）$y'=2x$　　$L=2\cdot\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=2\int_0^1\sqrt{1+(2x)^2}dx$

$t=2x$ とおくと、　$\dfrac{dt}{dx}=2$　$\therefore dt=2dx$　$\therefore \dfrac{1}{2}dt=dx$

x	$0\ \rightarrow\ 1$
t	$0\ \rightarrow\ 2$

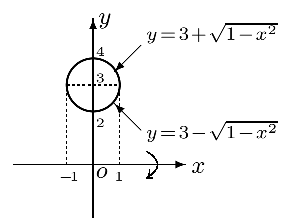


$$L=2\int_0^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_0^2\sqrt{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+1\cdot\log\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2\sqrt{5}+\log\left|2+\sqrt{5}\ \right|\right)-(0+\log 1)\right\}=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})\quad〃$$

3. 円 $x^2+(y-3)^2=1$ の内部を x 軸のまわりに回転してできる回転体（ドーナツ型）について、次の各問に答えよ。

(1) 回転体の体積 V を求めよ。



（解）$(y-3)^2=1-x^2$　$\therefore y-3=\pm\sqrt{1-x^2}$　$\therefore y=3\pm\sqrt{1-x^2}$

$y_1=3+\sqrt{1-x^2}$　,　$y_2=3-\sqrt{1-x^2}$　とおくと

$$V=\pi\int_{-1}^{1}{y_1}^2dx-\pi\int_{-1}^{1}{y_2}^2dx=2\cdot\pi\int_0^1{y_1}^2dx-2\cdot\pi\int_0^1{y_2}^2dx$$

$$=2\pi\int_0^2({y_1}^2-{y_2}^2)dx=2\pi\int_0^1(y_1+y_2)(y_1-y_2)dx=2\pi\int_0^1 6\cdot 2\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=24\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=24\pi\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}+1\cdot\ \mathrm{Sin}^{-1}x\right]_0^1$$

$$=12\pi\left\{(1\sqrt{0}+\ \mathrm{Sin}^{-1}1)-(0+\ \mathrm{Sin}^{-1}0)\right\}=12\pi\cdot\ \mathrm{Sin}^{-1}1=12\pi\cdot\frac{\pi}{2}=6\pi^2\quad〃$$

(2) 回転体の表面積を求めよ。

（解）$y=3\pm\sqrt{1-x^2}$　$\therefore y'=0\pm\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\mp\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\sqrt{1+(y\ )^2}=\sqrt{1+\left(\mp\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{(1-x^2)+x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$S_1=2\pi\int_{-1}^{1}y_1\sqrt{1+(y_1\ )^2}dx=2\cdot2\pi\int_0^1(3+\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=4\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)dx$$

$$S_2=2\pi\int_{-1}^{1}y_2\sqrt{1+(y_2\ )^2}dx=2\cdot2\pi\int_0^1(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=4\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)dx$$

$$S=S_1+S_2=24\pi\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=24\pi\Big[Sin^{-1}x\Big]_0^1=24\pi\big(Sin^{-1}1-Sin^{-1}0\big)=24\pi\cdot\frac{\pi}{2}=12\pi^2\quad〃$$

1. ≪参考≫　因数分解が暗算でできないときのために

$y' = 3x^2 \quad \therefore [y']_{x=1} = 3\cdot 1^2 = 3$

よって、接線の方程式は　$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2$

$$\begin{cases} y = x^3 \cdots\cdots ① \\ y = 3x-2 \cdots ② \end{cases}$$

①, ②から　$x^3 = 3x-2$

$\therefore x^3-3x+2=0 \cdots\cdots ③$

①と②は $x=1$ に対応する点で接するから、③は $x=1$ を重解にもつ。

よって、左辺は $(x-1)^2$ すなわち x^2-2x+1 で割りきれる。

$$\begin{array}{rl} & x+2 \\ x^2-2x+1 \,\big) & x^3 \qquad\quad -3x+2 \\ & x^3-2x^2 \ +x \\ \hline & \qquad 2x^2-4x+2 \\ & \qquad 2x^2-4x+2 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

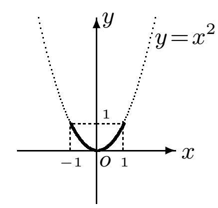
2. 曲線 $y=x^2\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の長さを求めよ。

（解）$L = 2\cdot\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{4\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}dx$

$= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}+x^2}dx = 4\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}+\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right|\right]_0^1 = 2\left[x\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}+\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right|\right]_0^1$

$= 2\left\{\left(1\sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{4}\log\left|1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right|\right)-\left(0+\frac{1}{4}\log\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\right\} = 2\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}\right\}$

$= \sqrt{5}+\frac{1}{2}\left\{\log\frac{2+\sqrt{5}}{2}-\log\frac{1}{2}\right\} = \sqrt{5}+\frac{1}{2}\log\frac{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})$　〃



3. 円 $x^2+(y-3)^2=1$ の内部を x 軸のまわりに回転して

できる回転体（ドーナツ型）について、次の各問に答えよ。

(1) 回転体の体積 V を求めよ。

（解）$(y-3)^2 = 1-x^2 \quad \therefore y-3=\pm\sqrt{1-x^2} \quad \therefore y = 3\pm\sqrt{1-x^2}$

$y_1 = 3+\sqrt{1-x^2}$　,　$y_2 = 3-\sqrt{1-x^2}$　とおくと

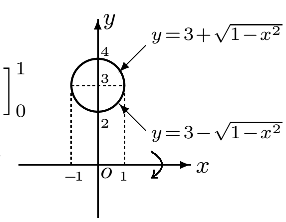
$V = 2\cdot\pi\int_0^1 {y_1}^2dx - 2\cdot\pi\int_0^1 {y_2}^2dx = 2\pi\int_0^1\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx - 2\pi\int_0^1\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$

$= 2\pi\int_0^2\left\{\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right\}dx$

$= 2\pi\int_0^1\left\{\left(9+6\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)-\left(9-6\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)\right\}dx$

$= 2\pi\int_0^1 2\cdot 6\sqrt{1-x^2}dx = 24\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = 24\pi\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}+\text{Sin}^{-1}x\right]_0^1$

$= 12\pi\left\{(1\sqrt{0}+\text{Sin}^{-1}1)-(0+\text{Sin}^{-1}0)\right\} = 12\pi\cdot\text{Sin}^{-1}1 = 12\pi\cdot\frac{\pi}{2} = 6\pi^2$　〃



(2) 回転体の表面積を求めよ。

（解）$y = 3\pm\sqrt{1-x^2} \quad \therefore y' = 0\pm\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \mp\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1+(y\ )^2} = \sqrt{1+\left(\mp\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{(1-x^2)+x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$S = 2\pi\int_{-1}^1 y_1\sqrt{1+(y_1\ )^2}dx + 2\pi\int_{-1}^1 y_2\sqrt{1+(y_2\ )^2}dx$

$= 2\cdot2\pi\int_0^1 y_1\sqrt{1+(y_1\ )^2}dx + 2\cdot2\pi\int_0^1 y_2\sqrt{1+(y_2\ )^2}dx$

$= 4\pi\int_0^1(3+\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + 4\pi\int_0^1(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= 4\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)dx + 4\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)dx = 4\pi\int_0^1\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= 24\pi\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 24\pi\left[\ \text{Sin}^{-1}x\right]_0^1 = 24\pi(\ \text{Sin}^{-1}1-\text{Sin}^{-1}0) = 24\pi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 12\pi^2$　〃