積分法 ≪基礎≫ 小テスト $(No.8)$ 解答例

1. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$　　≪考え方≫ $\displaystyle\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}$ より、部分積分法を利用

（解） $\displaystyle\int xe^{2x}dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int(x)'\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)$　〃

(2) $\displaystyle\int x^3\log x dx$　≪考え方≫ $\displaystyle\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4$ より、部分積分法を利用　**(注：$\log x$ は微分する方にまわす)**

（解） $\displaystyle\int x^3\log x dx=\frac{1}{4}x^4\log x-\int\frac{1}{4}x^4\cdot(\log x)'dx=\frac{1}{4}x^4\log x-\int\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{4}\int x^3xd=\frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4=\frac{1}{16}x^4(4\log x-1)$　〃

(3) $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}dx$　　≪考え方≫ $\displaystyle\int 1\,dx=x$ より、部分積分法を利用

（解）$\displaystyle\int\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}dx=\int 1\cdot\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}dx=x\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}-\int x\left(\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}\right)'dx$

$\displaystyle=x\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}-\int x\cdot\frac{2}{4+x^2}dx=x\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}-\int\frac{2x}{4+x^2}dx$

$\displaystyle=x\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}-\int\frac{(4+x^2)'}{4+x^2}dx=x\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}-\log(x^2+4)$　〃

≪合成関数の微分法≫

$\displaystyle\left(\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)'$

$\displaystyle=\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{4+x^2}\cdot\frac{1}{2}$

$\displaystyle=\frac{2}{4+x^2}$

2. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x dx$　≪考え方≫ $\displaystyle\int\cos x dx=\sin x,\int\sin x dx=-\cos x$ より、部分積分法を利用

（解） $\displaystyle\int x^2\cos x dx=x^2\sin x-\int(x^2)'\sin x dx=x^2\sin x-\int 2x\sin x dx=x^2\sin x-2\int x\sin x dx$

$\displaystyle=x^2\sin x-2\left\{x(-\cos x)-\int(x)'(-cosx)dx\right\}=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos x dx$

$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x=(x^2-2)\sin x+2x\cos x$　〃

(2) $\displaystyle\int e^x\sin x dx$

（解 1）　$\displaystyle\int e^x dx=e^x$　であるから

$\displaystyle\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x(\sin x)'dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx$

$\displaystyle=e^x\sin x-\left\{e^x\cos x-\int e^x(\cos x)'dx\right\}=e^x\sin x-e^x\cos x+\int e^x(-\sin x)dx$

$\displaystyle=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin x dx$

$\displaystyle\therefore 2\int e^x\sin x dx=e^x(\sin x-\cos x)$　$\displaystyle\therefore\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$　〃

（解 2） $\displaystyle\int\cos x dx=\sin x,\int\sin x dx=-\cos x$　であるから

$\displaystyle\int e^x\sin x dx=e^x(-\cos x)-\int(e^x)'(-\cos x)dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx$

$\displaystyle=-e^x\cos x+\left\{e^x\sin x-\int(e^x)'\sin x dx\right\}=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx$

$\displaystyle\therefore 2\int e^x\sin x dx=-e^x\cos x+e^x\sin x$　$\displaystyle\therefore\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$　〃

（解 3）公式 $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$ を利用して

$\displaystyle\int e^x\sin x dx=\frac{e^{(1\cdot x)}}{1^2+1^2}\{1\cdot\sin(1\cdot x)-1\cdot\cos(1\cdot x)\}=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$　〃