[選択項目] 年度：1991〜2026 年　 文中： $\iint$

0.1 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$　　　(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+3y^2 \leqq 1\right\}$

(北海道大 2017)　　(m20170104)

0.2 D を xy 平面の第一象限で $y=x^2$ と $y=x$ に囲まれた領域とし，次に示す重積分を求めなさい.

$$I=\iint_D (2x-y)\,dxdy$$

(北海道大 2024)　　(m20240102)

0.3 次の定積分を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq\ a^2 \quad (a>0)$$

(北見工業大 2004)　　(m20040204)

0.4 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}}\,dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1\ ,\ 2\leqq\ y\leqq\ 3\}$ とする.

(北見工業大 2009)　　(m20090204)

0.5 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D:1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4$ を求めよ.

$\left(\quad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\quad \text{とおくとよい.} \quad\right)$

(北見工業大 2011)　　(m20110205)

0.6 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2}dxdy,\ D:0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ x$ を求めよ.

(北見工業大 2012)　　(m20120206)

0.7 積分 $\displaystyle J=\iint_D (1-x-y)dxdy$ を計算せよ．ただし，$D\ :\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 1$ とする.

(北見工業大 2017)　　(m20170205)

0.8 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$ とする.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\ dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2018)　　(m20180204)

0.9 平面の部分集合 D を次で定める.

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1,\ y\geqq x\right\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2\ dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190204)

0.10 平面の部分集合 D を次で定める:

$$D=\{(x,y)\ \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 2x+y\leqq 2\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019) (m20190211)

0.11 平面の部分集合 D を次で定める:

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x \geqq 0,\ y \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \iint_D xy^2 dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2022) (m20220205)

0.12 重積分

$$I = \iint_D y\,dxdy$$

について次の問いに答えなさい. ただし, xy 平面上の領域 D は

$$x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2 + y^2 \leqq\ 1$$

の共通部分である.

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 I を求めなさい.

(3) $x,\ y$ を極座標に変換して重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2010) (m20100304)

0.13 $D = \left\{(x, y)\,|\,x^2 + y^2 \leqq\ 2y\right\}$ とするとき, 次の重積分について以下の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$$

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) x , y を極座標変換したとき, 領域 D が移る領域 G を求め, 図示しなさい.

(3) (1) および (2) の結果を用いて, 重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2011) (m20110303)

0.14 球の体積を積分を用いて求めるとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$〜$\boxed{\text{（カ）}}$ に正しい式を入れなさい.

直交座標 (x, y, z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は, $\boxed{\text{（ア）}}$ であり, 球の上半分は関数 $z = \boxed{\text{（イ）}}$ で表される.

その定義域 D は $\boxed{\text{（ウ）}}$ であり, 球の体積 V は次の重積分で与えられる.

$$V = 2\iint_D \boxed{\text{（イ）}}\,dxdy \cdots\cdots\cdots ①$$

極座標 (r, θ) を用いると, D は $\boxed{\text{（エ）}}$, $\boxed{\text{（オ）}}$ と表され, 関数 z は $z = \boxed{\text{（カ）}}$ で表される.

(2) ① 式を極座標に変換して表しなさい.

(3) (2) の結果を用いて, 球の体積 V を求めなさい.

(岩手大 2012)　　(m20120303)

0.15 次の各問いに答えなさい．

(1) $D_1 = \{(x,y)\,|\,1 \leqq x \leqq 2\,,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ のとき，領域 D_1 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい．

$$\iint_{D_1} (x+2y)dxdy$$

(2) $D_2 = \left\{(x,y)\,|\,0 \leqq y \leqq -x^2+4x\right\}$ のとき，領域 D_2 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい．

$$\iint_{D_2} xdxdy$$

(3) $D_3 = \left\{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\right\}$ のとき，領域 D_3 を図示しなさい，また，次の 2 重積分の値を極座標に変換して求めなさい．

$$\iint_{D_3} x^2\,dxdy$$

(岩手大 2013)　　(m20130303)

0.16 次の立体について，以下の問いに答えなさい．

曲面 $x^2+y^2=z^2$，平面 $z=0$，平面 $z=1$ で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい．

(2) この立体の体積 V は，次の重積分で表せる． $\boxed{\text{（ア）}}$ ， $\boxed{\text{（イ）}}$ にあてはまる式を答えなさい．

$$V = \iint_D \left(1 - \boxed{\text{（ア）}}\right)dxdy \qquad D = \left\{(x,y)\;\middle|\;\boxed{\text{（イ）}}\right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして，この立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2014)　　(m20140303)

0.17 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2\ \ (a>b>0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

　この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z=0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい．

　この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V = \pi\int_{-b}^{b} \boxed{\text{（オ）}}\ dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V = \boxed{\text{（カ）}}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq 0$ の部分は関数 $z =$ $\boxed{\text{（キ）}}$ で表される.

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる.

$$V = 2\iint_{D_1} \boxed{\text{（キ）}}\, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい.

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.18 次の問いに答えなさい.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (ただし, $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$) によって，xy 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003)　　(m20030402)

0.19 a, b, R を定数（ただし,$R > 0$ ）とし, 積分

$$I = \iint_D (x^2+ay+b)dxdy$$

を次の手順で計算しよう. ただし, 領域は

$$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\} \quad \text{である.}$$

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2+2b)dxdy$ を計算しなさい.

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_D a(x+y)dxdy$ を計算しなさい.

(3) I_1, I_2 から,

$$I = \boxed{}$$

である. 当てはまる式を上の欄に答えなさい.

(秋田大 2004)　　(m20040403)

0.20 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2+y^2 \leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005)　　(m20050406)

0.21 (1) $x = u-w,\ y = u+w$ とおく．行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と，その行列式を求めよ.

(2) D は平面内の領域で，次の 4 直線で囲まれているとする.

$$y = x\ ,\quad y = -x\ .\quad y = x+2\ ,\quad y = -x+4$$

このとき，積分 $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ の値を求めよ.

(秋田大 2008)　　(m20080407)

0.22 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を求めよ．ここで，$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq\ x,\ 0 \leqq\ y,\ x+y \leqq\ 1\}$ である．

(秋田大 2009)　　(m20090404)

0.23 $D = \{(x,y) \mid 4x^2+y^2<4\,,\ x>0\,,\ y>0\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(東北大 2006)　　(m20060506)

0.24 領域 $D = \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ での広義重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(4+2x+y)^3}$ の値を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070504)

0.25 領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\ ,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ で $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}\ dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2008)　　(m20080508)

0.26 領域 $D = \{(x,y)\ :\ 0 \leq x+y \leq 2\,,\ 0 \leq x-y \leq 2\}$ として，次の計算をせよ．

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}dxdy$$

(東北大 2009)　　(m20090508)

0.27 (x,y) 座標平面において，4 本の直線

$$y=x, \qquad y=x-1, \qquad y=-x+1, \qquad y=-x+3$$

で囲まれた閉領域 D を考える．このとき，重積分

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$$

を，変数変換 $u=x+y,\ v=x-y$ を用いて求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150510)

0.28 領域 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq\ 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq\ y\right\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 領域 D の面積 S を求めよ．

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される．

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S}\iint_D xdxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D ydxdy\right) \qquad S: \text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.29 (1) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\right\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D xy^2dxdy$ の値を求めよ．

(2) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ \middle|\ 0 \leq y \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2+y^2+1\right\}$ の体積を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160507)

0.30 重積分

$$\iint_D (3x^2+y^2)dxdy \qquad \left(D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}\right)$$

の値を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190510)

0.31 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) f は $(0,0)$ において連続であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(東北大 2021)　　　(m20210510)

0.32 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ．

$$I = \iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ \ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ．

(4) 重積分 I を計算せよ．

(東北大 2022)　　　(m20220505)

0.33 領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq \pi,\ 1 \leqq y \leqq 2\right\}$ のとき，関数 $f(x,y) = x\sin(xy)$ について，以下の問に答えよ．

(1) $g(x,y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)^2 + x^2 f(x,y)^2$ を求めよ．

(2) 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D g(x,y)^{\frac{1}{4}}\sin(xy)\,dxdy$$

(東北大 2023)　　　(m20230504)

0.34 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定める．

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leq 2x,\ x \leq 2y,\ x+y \leq 3\right\}$$

(1) 線形写像 $T\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+2y \end{pmatrix}$$

と定める．T による D の像 E を求めよ．

(2) D における重積分

$$I = \iint_D y\, dxdy$$

を求めよ.

(3) D の境界上を正の向きに辿る経路を ∂D とおくとき, ∂D 上の線積分

$$J = \int_{\partial D} xy\, dy$$

を求めよ.

(東北大 2023) (m20230510)

0.35 位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とし，その大きさを $r = |\boldsymbol{r}|$ とする．ただし，xyz 空間の各軸方向の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．

(a) $\nabla \cdot (r^2\boldsymbol{r})$ を求めよ．

(b) 閉曲面 S を境界に持つ領域 V について，次式が成り立つことを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．

$$\iint_S (r^2\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V 5r^2 dV$$

(c) 閉曲面 S として原点を中心とする半径 a の球の表面を考える．(b) で証明した等式を用いて S 上の面積分 $\displaystyle\iint_S (r^2\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ．

(東北大 2024) (m20240507)

0.36 領域 $D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 2 \leqq xy \leqq 4,\ x^2 \leqq y \leqq 3x^2 \right\}$ において関数 $f(x, y) = x^3 + y^3$ について，以下の問に答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = y/x^2$ について，ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ．

(2) 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

(東北大 2025) (m20250504)

0.37 $D = \{(x, y)\,;\ 0 \leq x + y \leq \pi, 0 \leq x - y \leq \pi\}$ としたとき,

$$\iint_D (x - y)\sin(x + y)\, dxdy$$

を求めよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970605)

0.38 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x} dxdy, \qquad D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq x\}$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000608)

0.39 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

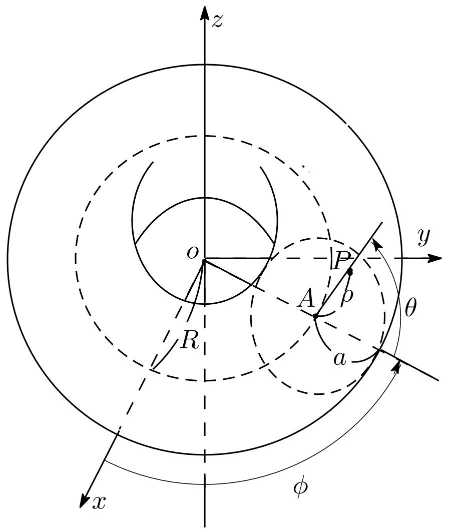
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r} \cdot dS \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ． ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ, x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.40 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 dx\,dy \qquad , \qquad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \qquad (a, b > 0)$$

を求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960802)

0.41 (x, y) 平面内の領域 $D = \{\, 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \,\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{2x^2 - y^2}\; dx\; dy$ を計算せよ．

(東京工業大 1998)　　(m19980801)

0.42 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (\, x^{2n} + 2y^{2n} + 1\,)\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ の値を求めよ．

(東京工業大 1999)　　(m19990801)

0.43 (1) 次の積分をせよ． $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \qquad D : 0 \leq x \leq y \leq 1$

(2) 二つの曲面 ： $z^2 = 4ay$, $x^2 + y^2 = ay$ に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010804)

0.44 $a > 0$ に対して積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\; dxdy$ の値を求めよ．

(東京工業大 2002)　　(m20020804)

0.45 a, b を正の数とするとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1} \left(\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}\right) dxdy$$

(東京工業大 2005)　　(m20050802)

0.46 次の重積分の値を求めよ．ただし，$a>0,\ b>0$ とする． $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1}(ax^2+by^2)dxdy$

(東京工業大 2007)　　(m20070802)

0.47 $u(x,y)=xy^2,\ v(x,y)=x+y$ とおく．次の積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_K \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\ , \quad \left(K\ :\ \frac{x^2}{4}+y^2\leq a^2\right)$$

ただし，a は正の定数である．

(東京工業大 2008)　　(m20080802)

0.48 $\beta,\gamma<0$ とする．次の広義積分の値を求めよ．ただし，広義積分が ∞ に発散する場合には，その値を ∞ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{0<x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)^{\beta}dxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1}(x^2+y^2)^{\gamma}dxdy$

(東京工業大 2009)　　(m20090803)

0.49 次の広義積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_{x\geq 0,\ y\geq 0} e^{-x^2-xy-y^2}\,dxdy$

(東京工業大 2012)　　(m20120802)

0.50 (x,y) 平面内の 4 個の曲線

$$y^2=x,\quad y^2=3x,\quad xy=1,\quad xy=2$$

で囲まれた領域を D とする．

(1) $u=\dfrac{y^2}{x},\ v=xy$ とするとき，D は (u,v) 平面内のどのような領域にうつるか.

(2) 積分

$$I=\iint_D e^{xy}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(東京工業大 2015)　　(m20150802)

0.51 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{y^3}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ \sqrt{x}\leqq y\leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq x\right\}$

(東京工業大 2016)　　(m20160804)

0.52 c を正の実数とする．次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy \quad D\ :\ x^2+y^2\leqq cx$$

(東京工業大 2017)　　(m20170804)

0.53 次の重積分を求めよ．ただし，a, b は正の実数とする．

$$\iint_D x^4 dxdy \qquad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

(東京工業大 2018) (m20180804)

0.54 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x^2 + y^2)^2 y^2 dxdy$$

(東京工業大 2019) (m20190804)

0.55 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; |x| + |y| \leqq \pi\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{(x-y)^2 + \pi^2} dxdy$$

(東京工業大 2020) (m20200804)

0.56 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z \cos z \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\ dxdydz$$

(東京工業大 2022) (m20220802)

0.57 (1) 次の二重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy\ dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \leqq 2xy,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$$

(2) a, b を正の実数とする．xyz 空間内において，円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ と三平面 $z = b$, $z = \dfrac{b}{a}y$, $z = -\dfrac{b}{a}y$ によって囲まれる部分の体積を求めよ．

(東京工業大 2023) (m20230802)

0.58 xy 平面の領域 D_1 と D_2 を

$$D_1 = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 16\right\}. \qquad D_2 = \left\{(x, y) \;\middle|\; (x-1)^2 + 2(y-1)^2 < 2\right\}$$

とし，D_1 から D_2 を取り除いてできる領域を D とする．次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$$

(東京工業大 2025) (m20250801)

0.59 $D = \left\{(x, y) \,|\, 1 < x < 2,\ \frac{1}{2} < y < 2\right\}$ で $\displaystyle\iint_D (x^2 - 8xy) dxdy$ を求めよ．

(東京農工大 1996) (m19960904)

0.60 xy 平面において曲線 $y = \log x$ と x 軸と直線 $x = 2$ とで囲まれる領域を D とするとき，次の 2 重積分の値を求めなさい． $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x} dxdy$

(東京農工大 2007) (m20070903)

0.61 (1) 領域 D : $0 \leqq x \leqq 1$, $x^2 \leqq y \leqq 2-x$ における次の重積分を求めなさい． $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x+1}\,dxdy$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx$ を，$t = x - \dfrac{1}{x}$ と置いて求めなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080903)

0.62 次の定積分，二重積分の値を求めなさい．ここで，$\tan^{-1} x$ は，$\tan x$ の逆関数（アークタンジェント）のことである．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$,　$D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \geqq 1\}$

(東京農工大 2009)　　(m20090904)

0.63 領域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ における次の二重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2} - x^3\right) dxdy$$

(東京農工大 2010)　　(m20100903)

0.64 領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}\ ,\ 0 \leqq x \leqq \sin y\right\}$ における次の重積分 A および B の値を求めなさい．

$$A = \iint_D \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdy\ , \qquad B = \iint_D \sqrt{1-x^2}\,dxdy$$

(東京農工大 2011)　　(m20110903)

0.65 領域 $D = \left\{(x,y) | x^2+y^2 \leqq x\right\}$ における次の二重積分 I の値を求めなさい．

$$I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

(東京農工大 2012)　　(m20120902)

0.66 以下の広義積分の値を求めなさい．ただし log は自然対数を表す．

$\displaystyle\iint_D (x-y)\log(x+y+1)dxdy$,　$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq x-y \leqq 1,\ 0 \leqq x+y \leqq 1\right\}$

(東京農工大 2013)　　(m20130903)

0.67 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$,　$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq 3,\ \dfrac{x^2}{9} \leqq y \leqq \sqrt{4-x}\right\}$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2015)　　(m20150902)

0.68 領域 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq x,\ y \geqq 0\}$ における次の 2 重積分 I の値を求めなさい．

$$I = \iint_D x^2 y\,dxdy$$

(東京農工大 2016)　　(m20160902)

0.69 領域 $D = \left\{(x,y) \mid x^2+4y^2 \leqq 2\right\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{2-x^2-4y^2} dxdy$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2018)　　(m20180902)

0.70 領域 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + 2xy + 5y^2 \leqq 1\right\}$ における，次の 2 重積分 I の値を求めなさい．

$$I = \iint_D (x+y)^2 dxdy$$

(東京農工大 2019)　　(m20190902)

0.71 重積分 $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y} dxdy,\quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x - y \leqq 2,\ 0 \leqq x + y \leqq 3\right\}$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2022)　　(m20220903)

0.72 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} \leqq 1\right\}$ における次の 2 重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D y\, dxdy$$

(東京農工大 2023)　　(m20230902)

0.73 重積分

$$\iint_D \left\{\left(\sqrt{3}x - y\right)^2 + \left(x + \sqrt{3}y\right)^2\right\} dxdy,\ \ D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \left|\sqrt{3}x - y\right| \leqq 2,\ \left|x + \sqrt{3}y\right| \leqq 2\right\}$$

の値を求めなさい．

(東京農工大 2024)　　(m20240902)

0.74 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\, dx\right) dy$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\, dx\, dy,\quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqq x - y \leqq \pi,\ 0 \leqq x + y \leqq \pi\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\, dy}{x^2 + y^2},\quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\}$

(電気通信大 1998)　　(m19981002)

0.75 次の重積分および 3 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy,\quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\, dx\, dy,\quad D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ （ただし，$a > 0,\ b > 0$）

(3) $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3},\quad V = \{(x, y, z) : x + y + z \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$

(電気通信大 1999)　　(m19991002)

0.76 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\, dxdy,\quad D = \{(x, y) : y \leqq 3x,\ x \leqq 3y,\ x + y \leqq 4\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq 1\}$

(電気通信大 2000)　　(m20001003)

0.77 次の重積分および 3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 d, dy,\quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leqq 1\}$

(電気通信大 2001)　　(m20011004)

0.78 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy\,, \qquad D=\{(x,y)\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 2\,,\ y \geqq\ |x|\}$$

(電気通信大 2005)　　(m20051005)

0.79 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{4(x-y)}{1+(x+y)^2}dxdy\,, \quad D: y \geqq\ 0\,,\ x-y \geqq\ 0\,,\ x+y \leqq\ 1\,.$

(2) $\displaystyle\iiint_E xydxdydz\,, \quad E: x \geqq\ 0\,,\ y \geqq\ 0\,,\ x^2+y^2+z^2 \leqq\ 1\,.$

(電気通信大 2006)　　(m20061002)

0.80 次のそれぞれの重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy\,,$ 　ただし, $D=\{(x,y)\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\,,\ y \ge 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+3y)^2\,e^{x-y}\,dxdy\,,$ 　ただし, $D=\{(x,y)\ :\ |x+3y| \le 1\,,\ |x-y| \le 1\}$

(電気通信大 2010)　　(m20101004)

0.81 次の重積分について, 以下の問いに答えよ.

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4} \qquad (D: x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1)$$

(1) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ とおくとき, x,y の u,v に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) I の値を求めよ.

(電気通信大 2011)　　(m20111004)

0.82 次の重積分, 3 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{2(x-y)}dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\ :\ |x+y| \leqq\ 1,\ |x-y| \leqq\ 1\}$

ただし, e は自然対数の底とする.

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\,, \quad D=\big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 2x,\ y \geqq\ 0\big\}$

(3) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\,, \quad V=\big\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 \leqq\ 1\big\}$

(電気通信大 2012)　　(m20121004)

0.83 関数 $u(x,y,t)=\dfrac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$ 　$(t>0)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

以下では, $t>0$ を定数とする.

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots$$

の係数 a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02} を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} u(x,y,t)\,dxdy$ を計算せよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.84 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\sin^2(x-2y)dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ :\ 0\leq x+2y\leq\pi\,,\ 0\leq x-2y\leq\frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ :\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\,,\ 0\leq y\leq x\right\}$

(電気通信大 2013)　　(m20131004)

0.85 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy\,, \qquad D=\{(x,y):x^2+y^2\leqq\ y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy\,, \qquad D=\{(x,y):|x|+|y|\leqq\pi\}$

(電気通信大 2014)　　(m20141004)

0.86 次の重積分, 3 重積分の値を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy\,, \qquad D=\{(x,y):0\leqq\ x-y\leqq\ x+y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\,, \qquad v=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$

(電気通信大 2015)　　(m20151004)

0.87 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x^2-y^2)^2+1}dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\ , \quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(電気通信大 2016)　　(m20161004)

0.88 (1) 積分順序を交換することにより, 次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\frac{x\sin y}{y}dy$$

(2) 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_V x^2dxdydz\ , \qquad V=\left\{(x,y,z)\ :\ y\leqq x,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0,\ x^2+y^2+x^2\leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2017)　　(m20171004)

0.89 次の重積分, 3 重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}dxdy \quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_E xyzdxdydz, \quad E=\left\{(x,y,z)\ :\ y\geqq x\geqq 0,\ z\geqq 0,\ x^2+y^2+z^2\leqq 1\right\}$

(電気通信大 2018)　　(m20181004)

0.90 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x,y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x,y)\,dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.91 次の重積分の値をそれぞれ計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2)\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : 0 \leqq y \leqq x \leqq \sqrt{\pi}\right\}$

(電気通信大 2020)　　(m20201004)

0.92 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\ \sin(xy)\,dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y)\ :\ 1 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ x|y| \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(電気通信大 2021)　　(m20211004)

0.93 xy 平面上の曲線 $C\ :\ \begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，これを $y = f(x)\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)\ \ (0 < x < 1)$ を t の関数として表せ．

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.94 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle I_1 = \iint_{D_1} e^y\,dxdy,\qquad D_1 = \left\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ \ 0 \leqq x-y \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle I_2 = \iint_{D_2} x\sqrt{x}\,dxdy,\qquad D_2 = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq x\right\}$

(3) $\displaystyle I_3 = \iiint_V y\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\quad V = \left\{(x,y,z)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2022)　　(m20221004)

0.95 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{(y+3)^2}\,dxdy \qquad D\ \textbf{:}\ |2x-y| \leqq 1,\ \ 0 \leqq x \leqq 7$$

(電気通信大 2023)　　(m20231004)

0.96 次の重積分の値を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} x^2 dxdy\ ,\qquad D_1 = \{(x,y)\ :\ x^2+2y^2 \leqq 1\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} ye^{y-x^2} dxdy\ ,\qquad D_2 = \{(x,y)\ :\ x^2 \leqq y \leqq \sqrt{2}x\}$

(電気通信大 2024)　　(m20241004)

0.97 次の重積分の値を求めよ.

$$I = \iint_D \sin(\pi y^2)dxdy, \quad D = \big\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 1)\big\}$$

(電気通信大 2025)　　(m20251004)

0.98 $D = \{(x,y)|\ x+y \leqq 1\ ,\ \ x,y \geqq 0\}$ とするとき，次の 2 重積分 I を求めよ.

$$I = \iint_D (2x+3y^2)dxdy$$

(千葉大 1996)　　(m19961202)

0.99 次の二重積分を求めよ.

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx\ dy$$

ここで，$D = \{(x,y) :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

(千葉大 1999)　　(m19991202)

0.100 ３次元空間中に球 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱 $x^2+y^2=2ax$ がある．球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい.

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい.

$$V = 2\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\ D = \{(x,y)\,|\,(x-a)^2+y^2 \leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r,θ) を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい.

$$D = \left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2001)　　(m20011201)

0.101 a をパラメータとして，次の定積分を求めなさい.　$I(a) = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy$

ここで，$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ 0 \leq x+y \leq a\}$

(千葉大 2002)　　(m20021202)

0.102 次の 2 重積分を求めなさい．ただし，$a>0\,,\ b>0$ とする.

$$V = \iint_D \frac{a}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy \qquad \text{ただし，} D = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \leq b^2\}$$

(千葉大 2003)　　(m20031203)

0.103 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq a^2\}$ として, 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(千葉大 2005) (m20051203)

0.104 重積分に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 領域 $D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\geq 0\,,\ x+y+z\leq \pi/2\}$ を図示しなさい.

(2) 次の不定積分を求めなさい. ただし, a は定数である.

$\displaystyle\int x\sin(a+x)dx$

(3) D を積分領域として, 次の 3 重積分の値を求めなさい.

$\displaystyle\iiint_D z\sin(x+y+z)dxdydz$

(千葉大 2007) (m20071208)

0.105 三次元空間中に, 球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=2ax$ がある. 球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z\geq 0)$ の体積 V を求めたい.

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい.

$$V=\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2\leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると, 領域 D は次のように表されることを示しなさい.

$$D=\left\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leq r\leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2008) (m20081203)

0.106 $a>0$ として, 次の重積分に関して各問いに答えなさい.

$$I(a)=\iint_D e^{-(x+y)}dxdy$$

$$D=\{(x,y)\mid x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ x+y\leq a\}$$

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 $I(a)$ を求めなさい.

(3) $I(a)$ を a の関数と考え, 定義域 $0<a<+\infty$ に対して, 極値, 変曲点, 極限を考慮して, そのグラフを書きなさい.

(千葉大 2009) (m20091203)

0.107 下記の重積分について以下の問いに答えなさい.

$I=\displaystyle\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \left(x^2+y^2\right)^2\leq y^2-x^2\,,\ y\geq 0\right\}$

(1) 極座標に変換して D を図示しなさい.

(2) I で示される積分領域の立体の外形を図示しなさい.

(3) I を極座標で書きなさい.

(4) I を求めなさい.

(千葉大 2012)　　(m20121204)

0.108　三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=ax$ がある．ただし，$a>0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z\geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1)　V が次のような重積分になることを図で示しなさい．
$v=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq ax\right\}$

(2)　極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．
$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 0\leq r\leq a\cos\theta\right\}$

(3)　極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.109　次の重積分に関して以下の問に答えなさい．

$I=\iint_D \dfrac{x+y}{y^2}\sin(x+y)\,dxdy$

$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leq y\leq 2\ ,\ 0\leq x\leq y\right\}$

(1)　積分領域 D を $u=x+y,\ v=\dfrac{x}{y}$ の関係で (u,v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O-xy$ 平面での D，および，$O-uv$ 平面での D' を図示しなさい．

(2)　関数行列式（ヤコビアン）$J(x,y)=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$ を求めなさい．

(3)　重積分 I の値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161203)

0.110　$g(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

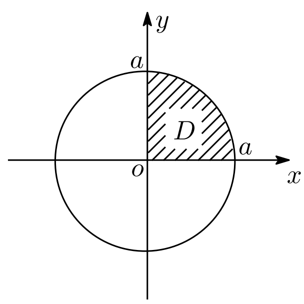
(1)　$\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ. また, 点 $(2,1)$ における $g(x,y)$ の勾配の大きさを求めよ.

(2)　$\iint_D g(x,y)dxdy$ を求めよ. ただし，$D:\ x^2+y^2\leq 1$ とする.

(筑波大 2004)　　(m20041315)

0.111　(1)　積分 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.
ただし, 積分領域 D は
$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqq\ a^2\ ,\ x\geqq\ 0\ ,\ y\geqq\ 0\}\ \ (a>0)$ とする.

(2)　(1) の結果を利用し, 領域 $D_\infty=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0\ ,\ y\geqq\ 0\}$ における広義積分 $\iint_{D_\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.



(筑波大 2005)　　(m20051311)

0.112　積分　$\iint_D (4-x-y)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x+y\leq 2\ ,\ 0\leq x\leq 1\ ,\ y\geq 0\}$　の値を計算せよ.

(筑波大 2006)　　(m20061306)

0.113 2 次元 $x-y$ 直交平面上で原点を中心とする半径 a の円の第一象限内にある部分を D とする．このとき，次の二重積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(筑波大 2006)　　(m20061310)

0.114 a, b を $a^2+b^2=1$ をみたす実数の定数とし，D を $D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ で定めるとき，

積分 $\displaystyle\iint_D \frac{(ax+by)^2}{\sqrt{1-(ax+by)^2}}dxdy$ を求めよ．

必要なら次の変数変換を用いてよい． $\begin{cases} u = \ \ ax+by \\ v = -bx+ay \end{cases}$

(筑波大 2007)　　(m20071309)

0.115 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け．

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f\circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f\circ g\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y) \mid -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$

(筑波大 2007)　　(m20071312)

0.116 積分 $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ を求めよ．ただし，積分領域 D は $D=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071316)

0.117 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz\ \ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ．

ただし，α は正の定数であり，$\ln x$ は x の自然対数を表している．

さらに積分領域 D は，$D=\{(x,y,z) \mid 1 < x^2+4y^2+9z^2 < 4\}$ とする．

(筑波大 2008)　　(m20081321)

0.118 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ 上での重積分 $I=\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ を以下の設問に従って求めよ．ただし，$a>0,\ b>0$ とする．

(1) $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ により変数変換を行う．積分領域 D を変数 $r,\ \theta$ で表せ．

(2) 前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ．

(3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091309)

0.119 $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y \geq 0\}$ と定めるとき, 積分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

を求めよ．

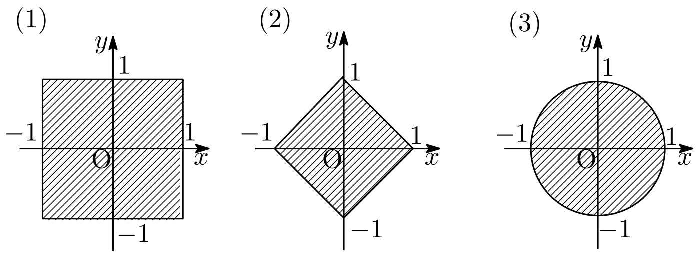
(筑波大 2010)　　(m20101304)

0.120 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ の値を, 積分範囲 D が次の 3 つの場合について, それぞれ計算せよ（図を参照）.

(1) $(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(2) $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(3) 原点を中心とする単位円の内部



(筑波大 2010) (m20101306)

0.121 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された次の二重積分 I_n を求めなさい.

$$I_n = \iint_K xy^n\,dxdy\,, \quad K = \{(x,y)\,|\,y \geqq x^2\,,\ x \geqq y^2\}$$

(筑波大 2010) (m20101320)

0.122 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\log_e(x^2+y^2)\,dxdy\ , \quad D = \{(x,y)\ |\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(筑波大 2011) (m20111309)

0.123 領域 D を $D = \left\{(x,y)\,|\,x^2 \leqq y \leqq 4x+5\,,\ -1 \leqq x \leqq 1\right\}$ とする. D を図示し,
重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ を求めよ.

(筑波大 2011) (m20111315)

0.124 a, b は正の定数とし, D を

$$D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\ |\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

で定めるとき, 積分

$$\iint_D |(ax+by)(-bx+ay)|e^{-(ax+by)^2}dxdy$$

を次のようにして求めよ.

(1) 次の変数変換のヤコビアンを計算せよ.

$$\begin{cases} u = ax+by, \\ v = -bx+ay \end{cases}$$

(2) 上の変数変換を用いて積分を計算せよ.

(筑波大 2011) (m20111322)

0.125 領域 $K = \left\{(x,y,z)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1\,,\ 0 \leqq z \leqq c\right\}$ とする. 3 重積分

$$I = \iiint_K y^2z^2\,dxdydz$$

を求めよ. ここで, a, b, c は正の定数である.

(筑波大 2012) (m20121311)

0.126 領域 D を

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x+y+z < 1,\ x,y,z > 0\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I = \iiint_D \frac{\log(x+y+z)}{\sqrt{xyz}}\, dxdydz$$

を以下の手順で求めよ．

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} u &= x+y+z \\ uv &= y+z \\ uvw &= z \end{aligned}$$

により，D が領域 $E = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < u,v,w < 1\}$ に写されることを示せ．

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ．

(3) I の値を求めよ．

(筑波大 2012) (m20121327)

0.127 関数 $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．極値の極大，極小についても調べよ．

(2) 次の積分領域 D_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$D_a = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq a^2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$$

(3) 次の積分領域 E_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{E_a} f(x,y)dxdy$ の $a \to \infty$ における極限値を求めたい．その導出過程を (2) の結果等と図を用いて説明し，極限値を示せ．

$$E_a = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq a\,,\ o \leq y \leq a\}$$

(4) (3) の結果を用いて次の積分値を求めよ．

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

(筑波大 2013) (m20131306)

0.128 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ (ただし，$(x,y) \neq (0,0)$) と定義する．ここで，$\log$ は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D = \{(x,y) \,|\, 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において定義されていないので，

$D_\varepsilon = \{(x,y) \,|\, \varepsilon^2 < x^2+y^2 \leq 1\,,\ \varepsilon \in \boldsymbol{R}\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013) (m20131308)

0.129 領域 $D=\{(x,y):0\leq x\leq 1\ ,\ 0\leq y\}$ において，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^2e^{-y}dxdy$$

(筑波大 2013) (m20131316)

0.130 半径 a の球体の領域 $D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq a^2\right\}$ を積分領域とする定積分 $\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x,y,z を極座標 r,θ,φ の関数として表せ． r,θ,φ の定義を図示すること．

(2) x,y,z の r,θ,φ の関するヤコビアンを計算せよ．

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ．

(筑波大 2014) (m20141310)

0.131 次の二重積分を求めなさい．ただし，$a>0$ とする．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\ ,\ xy\geq 0\right\}$$

(筑波大 2014) (m20141318)

0.132 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 積分 $I=\iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ を求めたい．そこで，$D_a=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq o,\ y\geq 0\right\}$，$a>0$ として，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}f(x,y)dxdy$ を極座標 $r,\ \theta$ を用いて計算することにより，I の値を求めよ．

(2) (7) の結果を用いて積分 $J=\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2dt}$ の値を求めよ．

(筑波大 2015) (m20151307)

0.133 $D=\{(x,y)\mid 0\leq 2x+y\leq 1,\ -1\leq x-2y\leq 0\}$ 上の二重積分 $\iint_D xdxdy$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $u=2x+y,\ v=x-2y$ と変数変換をしたとき，変数 (u,v) の D に対応する積分領域を示しなさい．

(2) 上記の変数変換の逆変換 $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ を示しなさい．

(3) $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ のヤコビアンを求めなさい．

(4) $\iint_D xdxdy$ を求めなさい．

(筑波大 2015) (m20151315)

0.134 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 2x\}$$

(筑波大 2015) (m20151319)

0.135 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D ye^{xy}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\right\}$

(筑波大 2016)　　(m20161304)

0.136 関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 原点を除いた領域において，ラプラス方程式を満足することを示せ．

(2) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy$ は存在するか．存在するときはその値を求めよ．

(3) 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(x,y)+ig(x,y)$ が，領域 $\mathrm{Re}\ z>0\ (x>0)$ において正則となるように，関数 $g(x,y)$ を定めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161318)

0.137 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ (x+y)^2+4(x-y)^2\leq 1\right\}$ における重積分
$I=\displaystyle\iint_D \frac{\left|x^2-y^2\right|}{(x+y)^2+4(x-y)^2}dxdy$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $x+y=r\cos\theta,\ x-y=\dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき，$x,\ y$ の $r,\ \theta$ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171301)

0.138 $f(x,y)=xy$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ．

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x,y)=c$ と直交し，点 $(p,0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p>0$ とする．

(3) C_p 上にあり $x>0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D=\bigcup_{1\leq p\leq 2} D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{x^2}dxdy$$

の値を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171304)

0.139 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x,y,z) を円柱座標 (r,θ,z) に変換する，$x,\ y,\ \dfrac{\partial x}{\partial r},\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial x}{\partial z}$ を $r,\ \theta,\ z$ の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}=E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x},\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta, z$ を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

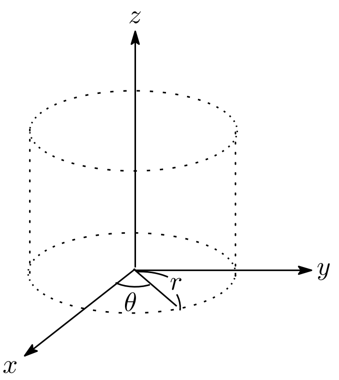
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される． 関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0,\ g(1) = 0,\ g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) $x,\ y,\ z$ の $r,\ \theta,\ z$ に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \qquad K = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.140 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y) \mid 1/4 \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^3|x-y|e^{(x^2-y^2)(x-y)}dxdy\ , \qquad D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

(筑波大 2018)　　(m20181320)

0.141 次の二重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$V = \iint_D (x^2+xy)dxdy \quad \cdots\cdots (*)$$

ただし，$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．

(1) x と y を極座標変換し，式 $(*)$ の右辺を書き換えなさい．

(2) V の値を求めなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191302)

0.142 $f(x,y) = x^2+y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S : z = x^2+y^2$ を考える．この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $O(0,0,0)$ とする．

(1) 点 $A(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I = \iiint_D (x^2 + y^2) dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.143 下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える．

$$I = \iint_D (4x^2 - y^2) e^{8xy} dxdy, \quad D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leq 2x + y \leq 1\ ,\ \ 0 \leq x - \frac{1}{2} y \leq 1 \right\}$$

(1) $u = 2x + y,\ v = x - \dfrac{1}{2} y$ と変数変換したとき， 変数の組 (u, v) の積分領域 E を示せ.

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ

(3) I を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191311)

0.144 次の 2 重積分を計算せよ．

$$I = \iint_D x e^{y^2}\, dxdy, \quad D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1 \right\}$$

(筑波大 2020)　　(m20201306)

0.145 $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$ とし，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2 t$ を用いて，広義積分 $\displaystyle \iint_D \frac{x^\alpha}{x^4 + y^2} dxdy$ を計算せよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle \iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} \log(1 + x^\alpha) dxdy$ が収束することを示せ.

(筑波大 2020)　　(m20201316)

0.146 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{y^2 - x^2}\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211306)

0.147 (1) 関数 $g(x) = x^x$ $(x > 0)$ について，$\displaystyle \lim_{x \to +0} g(x)$ を計算せよ．

(2) 与えられた領域 D において，(1) の結果を用いて，次の広義 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy\ ,\ \ D = \left\{ (x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \right\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211312)

0.148 二重積分 $I_n = \displaystyle \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^n} dxdy$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は存在するか．存在する場合は，その値を n を用いて表わせ．存在しない場合は，「存在しない」と答えること．

(筑波大 2021)　　(m20211317)

0.149 $a > 0$ とする．自然数 n に対し，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{t^2 + x^2 + a^2}\, dt$$

と定める．

(1) $f_n(x)$ を求めよ.

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{x^2+a^2}}$ に一様収束することを示せ.

(3) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ y > x\right\}$ とする. このとき広義積分

$$\iint_D \frac{y}{y^2+a^2}\ \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\, dxdy$$

は収束することを示し, その値を求めよ.

(筑波大 2024) (m20241312)

0.150 2 つの曲線 $y = x$ と $y = x^2$ で囲まれた領域を D とする. このとき次の二重積分を求めよ.

$$\iint_D xydxdy$$

(筑波大 2025) (m20251302)

0.151 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\ (t \in \mathbb{R})$, $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\ (t \in \mathbb{R})$ について,

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

を示せ.

(2) 関数 $\tanh t = \dfrac{\sinh t}{\cosh t}\ (t \in \mathbb{R})$ の逆関数を求めよ.

(3) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x/2,\ x^2 - y^2 \leq 1\right\}$ と定義する. このとき, 重積分

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2-y^2)^2} dxdy$$

を求めよ.

(筑波大 2025) (m20251314)

0.152 関数

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$$

について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 次偏導関数および 2 次偏導関数を求めなさい.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値の有無を調べ, 極値がある場合はそれを与える x, y と $f(x,y)$ の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 領域

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

における関数 $f(x,y)$ の重積分

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

を極座標変換を用いて求めなさい.

(筑波大 2026) (m20261311)

0.153 以下の重積分を計算せよ.

$$\iint_D (x^2+2y^2)dxdy, \qquad D=\{(x,y)\ \mid x^2+y^2 \leq 4\}$$

(筑波大 2026)　　(m20261316)

0.154 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z=f(x,y)$ $\big((x,y)\in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け.

(埼玉大 1998)　　(m19981401)

0.155 a を正の実数とし，次の不等式で定義された領域を D であらわす.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{a}\,, \qquad x\geq 0\,,\ y\geq 0$$

このとき，次の値を求めよ.

$$\iint_D dxdy\ , \qquad \iint_D x\,dxdy$$

(埼玉大 1999)　　(m19991403)

0.156 n は自然数とする．正の定数 a に対して

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+y^2\leq a^2\,,\ y\geq 0\}$$

とおく．このとき $\displaystyle\iint_D x^n y\,dxdy$ を求めよ.

(埼玉大 2002)　　(m20021402)

0.157 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

とする．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 $\tan$ の定義域を $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である.
また, $D=\{(x,y)\in\Omega \mid 2\leqq x^2+y^2\leqq 3,\ 0\leqq y\leqq x\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051406)

0.158 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれる xy 平面内の有界領域を D とする.

領域 D を図示し，重積分 $\displaystyle\iint_D ydxdy$ を計算せよ.

(埼玉大 2007)　　(m20071411)

0.159 以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x(x-1)^3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\,, \quad D=\{(x,y)\mid y\leqq 2x,\ x\leqq 2y,\ x+y\leqq 6\}$

(埼玉大 2008)　　(m20081402)

0.160 n を自然数とし，$D_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x-\dfrac{1}{n}\right\}$ とおく．α を $0<\alpha<1$ を満たす定数とする．次を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$ を求めよ．

(2) (1) の積分値を I_n とおいたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ．

(埼玉大 2009) (m20091407)

0.161 次の二重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xydxdy\,,\quad (\,D=\{\,(x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ 2x+3y\leq 6\,\}\,)$$

(埼玉大 2011) (m20111403)

0.162 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D e^{x+y}dxdy$$

ただし，直線 $y=x,\ x=1,\ y=0$ で囲まれた領域を D とする．

(埼玉大 2012) (m20121403)

0.163 次の 2 重積分を求めよ．ただし，$x\geq 0$，$\sqrt{x}\geq y\geq x$ で囲まれた領域を D とする．

$\displaystyle\iint_D(x+y)dxdy \qquad D : x\geq 0\,,\ \sqrt{x}\geq y\geq x$ (埼玉大 2013) (m20131404)

0.164 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2\leqq x^2-y^2\,,\ x\geqq 0\right\}$ とする．極座標を用いて，積分

$$\iint_D\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

を計算せよ．

(埼玉大 2014) (m20141408)

0.165 次の重積分を求めよ．ただし，$0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq\sqrt{x}$ で囲まれる領域を D とする．

$$\iint_D(2x+y)\,dxdy$$

(埼玉大 2015) (m20151404)

0.166 次の 2 重積分を求めよ．ただし，3 つの直線 $x=0,\ y=2,\ -2x+y=0$ で囲まれた領域を D とする．

$$\iint_D\frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$$

(埼玉大 2016) (m20161403)

0.167 次の 2 重積分を求めよ．ただし，放物線 $y=x^2$ と直線 $y-x-2=0$ で囲まれた領域を D とする．

$$\iint_D xydxdy$$

(埼玉大 2017) (m20171403)

0.168 $D=\{(x,y)\mid y\geqq 0\,,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\dfrac{2x}{a}\}$ のとき，

次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，a，b は正の定数とする．

$$\iint_D y\,dx\,dy$$

(茨城大 1998) (m19981701)

0.169 (u,v) 平面における正方形 $A=\{(u,v)|0\leqq u\leqq 1, 0\leqq v\leqq 1\}$ が,

$$\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$$

で表される写像により,(x,y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x,y) 平面上に図示せよ. さらに,B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_B x dxdy$ を求めよ.

(茨城大 2004)　　(m20041701)

0.170 $t>0$ とする．xy 平面内の領域 $D(t): t^2\leqq x^2+y^2\leqq 4t^2$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ 上の二重積分 $F(t)=\displaystyle\iint_{D(t)}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ 　について，次の問に答えよ．

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ．

(2) $F'(t)$ を計算せよ．

(茨城大 2006)　　(m20061702)

0.171 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．

$\rho>0$ とする．関数 $f(x,y)=r\sin 2\theta$ の正方形 $A=\{(x,y)\mid 0<x<\rho,\ 0<y<\rho\}$ 上の積分

$$I(\rho)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

と扇形 $B=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\mid 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho)=\iint_B f(x,y)dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071705)

0.172 $x>0,\ y>0$ とする．$a>0,\ 0<b<1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u=xy,\ v=\log\dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y=ax,\ y=(a^2+1)x$, および曲線 $xy=b,\ xy=b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a}=\dfrac{\partial S}{\partial b}=0$ となる点 (a,b) を求めよ．その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.173 次の連立不等式で表される領域を D とする．　　$x+y\leqq 2$,　　$0\leqq y\leqq\sqrt{x}$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．　　(2) 領域 D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1+y)\,dxdy$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081704)

0.174 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a,b は $a,b > 0$ を満たす実数とし，$g(x,y) = f(a^2x^2 + b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0,\ 1\,] \times \left[\,0,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^{\infty} f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b) = \iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2 + b^2 = 1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.175 座標平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,x,\,y$ は実数で $x^2 + y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ．

(1) $x = 0.01,\ y = 0.02$ のとき, $f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする．

3 つの座標平面 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ．

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n = 1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ．

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.176 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ について．以下の各問に答えよ．

(1) すべての $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，等式

$$f(x,y) = (\alpha x - y)(\beta x + y)$$

が成り立つように正定数 $\alpha,\ \beta$ を定めよ．

また $f(x,y) = 0,\ f(x,y) = 1$ の軌跡の概形を xy直交座標平面にそれぞれ図示せよ ．

(2) 点 (x,y) が原点を中心とする単位円周上を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を中心とする単位閉円盤を D とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy = f(a,b)$$

(茨城大 2011)　　(m20111702)

0.177 xy直交座標平面において $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqq 1$ と $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ とを満たす領域を D とする．二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2012) (m20121702)

0.178 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y\geqq x\,,\ y\geqq -x\,,\ 4\leqq x^2+y^2\leqq 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta\,,\ y=r\sin\theta$ に対して，$J=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}-\dfrac{\partial x}{\partial\theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012) (m20121704)

0.179 a を $0\leq a$ を満たす定数とし，

$$f(x,y)=x^2+y^2-2axy$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 次の重積分の値が 0 になるように a を定めよ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy\,,\qquad \text{ただし，}D=\Big\{(x,y)\ \Big|\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\Big\}.$$

(茨城大 2015) (m20151708)

0.180 xy 平面内の領域 $E=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq y,\ 1\leq y\leq 2\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_E\frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2016) (m20161703)

0.181 n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \Big|\ x^2+y^2\leq a^2\Big\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n)=\iint_{D_a}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $n\geq 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ．

(3) $n\geq 2$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I_a(n)$ を求めよ．

(茨城大 2017) (m20171703)

0.182 次の関数を考える．

$$f(x,y)=x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$

$0\leqq t$ に対して $D(t)=\Big\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid x^2+y^2\leqq 1,\ f(x,y)\geqq t\Big\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)}f(x,y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t)=0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty F(t)dt = \iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

0.183 実 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

(2) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の偏微分可能性を調べよ．

(3) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の全微分可能性を調べよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．
$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201701)

0.184 xy 平面内の領域 $D : 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x^2+3} \leqq y \leqq \sqrt{x^2+8}$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201704)

0.185 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ とする．このとき，つぎの小問 (1) および (2) に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(\sqrt{25-6x^2+15y^2})^3}dxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2021)　　(m20211703)

0.186 xy 平面内の有界閉領域 $E = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1\right\}$ 上の 2 重積分

$$\iint_E \frac{x-y}{(x+y)^{3/2}}dxdy$$

を計算せよ．

(茨城大 2023)　　(m20231703)

0.187 次の関数を考える．

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{2}$$

また，実数 t（ただし $t \neq \frac{1}{2}$）に対して $D(t) = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) \geqq t\right\}$ とする．このとき，以下の各小問に答えよ．

(1) 集合 $D(t)$ が空集合とならないための t の条件を求めよ．

(2) t が小問 (1) の条件を満たすとき，$D(t)$ が表す閉領域の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) t が小問 (1) の条件を満たすとき，重積分

$$F(t) = \iint_{D(t)} f(x,y)dxdy$$

を求めよ．

(茨城大 2024)　　(m20241705)

0.188 実 2 変数関数

$$f(x,y) = (x^2+a^2)^2 - (y^2-b^2)^2$$

について，以下の各小問に答えよ．ただし，a, b は $a^2 \neq 0$ かつ $b^2 \neq 0$ を満たす定数とする．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $f(x,y) = 0$ かつ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ を満たす点を (p,q) とする．点 (p,q) をすべて求めよ．

(3) $b^2 > a^2$ のとき，(2) で求めた各点 (p,q) において，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(p,q) \neq 0$ より，p を含む開区間で定義された $q = \varphi(p)$，$f(x,\varphi(x)) = 0$ を満たす陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する．このとき，$\dfrac{d\varphi}{dx}(p)$ と $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}(p)$ を求めよ．

(4) $a = b$ とする．xy 平面内の領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ に対して，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2025)　　(m20251703)

0.189 $f(x,y) = x^2y$ として，次の問に答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 領域 $D = \{(x,y) \mid y \geqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ を xy−平面上に図示せよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(4) D での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(山梨大 2002)　　(m20021803)

0.190 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$ を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D xydydx$ を求めよ．

(山梨大 2003)　　(m20031803)

0.191 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ を xy− 平面に図示しなさい．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めなさい．

(山梨大 2006)　　(m20061804)

0.192 座標平面上の領域 $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ を考えるとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D e^x \sin y\,dxdy$ の値を求めなさい．

(山梨大 2007)　　(m20071806)

0.193 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし，関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える．ここに，e は自然対数の底とする．

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい.

(2) α が定数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cos x\,dx$ を α の式で表しなさい.

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)\,dxdy$ の値を求めなさい.

(山梨大 2008)　　(m20081804)

0.194　α を正の定数として，座標平面上の領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq y\leqq\alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x\sin y\,dxdy$ を求め，α の式で表しなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091804)

0.195　2 変数関数 $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int g(x,1)dx$ を求めなさい.

(2) 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ とするとき，二重積分

$$\iint_D g(x,y)dxdy$$

の値を求めなさい.

(3) $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$ を満たす点 (x,y) を求めなさい.

(4) 上記の領域 D での $g(x,y)$ の最大値を求めなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111802)

0.196　領域 $D=\{(x,y)\mid x-y\leqq 1,\ x+y\leqq 1,\ x\geqq 0\}$ に対し，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+2)^2}\,dxdy$ を求めなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111807)

0.197　領域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 4x\ ,\ y\geqq 0\right\}$ における二重積分

$$\iint_D y^2\,dxdy$$

の値を求めなさい.

(山梨大 2013)　　(m20131803)

0.198　円周　$x^2+y^2=1$ ，直線　$y=x$　及び　y　軸によって囲まれた第 1 象限内の平面領域を　D　とする．次の 2 重積分を計算せよ.

$$\iint_D x^3y\,dx\,dy$$

(信州大 1998)　　(m19981903)

0.199　極座標に変換することによって，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 2y}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(信州大 1999)　　(m19991903)

0.200　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\pi\}$ とする．次の積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_D x^2\sin(x^2+y^2)dxdy$

(信州大 2007)　　(m20071903)

0.201 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの閉領域 U, V を

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le 2x + y \le 1\right\}$$
$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 3y^2 + 8xy + 1 \ge 0\right\}$$

で定める．次の定積分を求めよ．

$$\iint_{U \cap V} |x - 2y|\, dxdy$$

(信州大 2012)　　(m20121904)

0.202 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$ を計算せよ．

(2) 2 重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ．

ただし，$D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^2\right\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．また，$I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(信州大 2013)　　(m20131902)

0.203 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \sin(x^2) dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \{(x,y) \,:\, 0 \leqq y \leqq x \leqq \sqrt{\pi}\}$ とする．

(信州大 2014)　　(m20141902)

0.204 2 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + 2xy + y^2}$ の値を求めよ．

ただし，$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とする．

(信州大 2015)　　(m20151903)

0.205 $p > 2$ は実数とする．$D_n = \{(x,y) \,|\, 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分 $I_n(p) = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1+x+y)^p}$ を考える．

(1) $I_n(p)$ を計算し，極限値 $I(p) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\int_3^\infty I(p)dp$ を計算せよ．

(信州大 2016)　　(m20161902)

0.206 $D = \{(x,y) \mid 1 \le x + y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ とする．次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^3} dxdy$$

(信州大 2018)　　(m20181908)

0.207 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{(x-2y)^2} dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x + y \leqq x - 2y \leqq 1\}$ とする．

(信州大 2019)　　(m20191903)

0.208 実数 p は $0 < p \leqq 1$ を満たすとする．$D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える．このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ．それが存在する場合は極限値を求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201902)

0.209 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1} \sqrt{x}\, dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq x - 2y \leq 1 \right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x + 2y) dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0, 1]$ 上の実数値連続関数で，$\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx < \infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy) f(y) dy$$

(信州大 2020)　　(m20201906)

0.210 $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x + y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ とする．積分 $J = \displaystyle\iint_E \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ を求めよ.

(信州大 2021)　　(m20211903)

0.211 $D_n = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1 \right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ.

(信州大 2022)　　(m20221903)

0.212 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\, dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 2x \right\}$ とする.

(信州大 2023)　　(m20231903)

0.213 実数 p は $p > 2$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1 + x^2)^p}\, dx$ を求めよ.

(2) $D_n = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq n^2,\ x \leqq y \right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{|xy|}{(1 + x^2 + y^2)^p}\, dxdy$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n(p)$ を求めよ.

(信州大 2024)　　(m20241902)

0.214 以下の問いに答えよ.

(1) 次の重積分を求めよ.

$$\iiint_D 4(x^2 + y^2 - z^2) dxdydz, \qquad D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z,\ z \leq 1\}$$

(2) 曲面 $z = 3 - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ の円柱面 $x^2 + y^2 = 4$ の内部にある部分の面積を求めよ.

(信州大 2024)　　(m20241907)

0.215 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2} dx$ を求めよ.

(2) $D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq n^2\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上での 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} (x^2 + y^2)^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ.

(信州大 2025)　　(m20251902)

0.216 xy-平面上の領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x^2 - y^2 < 1,\ 0 < 2xy < 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}$ に対し，
変数変換 $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$ を考えると，領域 D と uv-平面上の領域
$D' = \left\{(u, v) \;\middle|\; 0 < u < 1,\ 0 < v < 1\right\}$ は一対一に対応する.
また，ヤコビアンについて $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right)^{-1}$ が成り立つ.

(1) 変数変換 $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$ に対し，ヤコビアン $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ を x と y を用いて表せ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^4 - y^4) dxdy$ の値を求めよ.

(信州大 2025)　　(m20251908)

0.217 以下の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^2 \cos 2x \, dx$ を求めよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + 2y) \cos^2(x - 3y) \, dxdy$ を求めよ.
ただし，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x + 2y \leqq x - 3y \leqq \pi\right\}$ とする.

(信州大 2026)　　(m20261902)

0.218 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2 + 2y^2) dxdy$ の値を求めよ．ただし，領域 D は
$D = \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y \leqq -2x + 1\}$　とする.

(新潟大 2001)　　(m20012005)

0.219 次の問に答えよ.

(1) 2 変数実数値関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 4\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y^2 dxdy$ の値を求めよ.

(新潟大 2003)　　(m20032003)

0.220 次の二重積分の値を求めよ. ただし, $D_1 : x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ とする.

$$\iint_{D_1} \sqrt{x + y} \, dxdy$$

(新潟大 2010)　　(m20102014)

0.221 $D=\left\{(x,y)\ ;\ x\geq 0,\ x\geq y,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\right\}$ のとき次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

(新潟大 2017) (m20172004)

0.222 $D=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq x\leq y\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D 2y\ dxdy$$

(新潟大 2019) (m20192005)

0.223 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 1\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ．積分順序を変更してもよい.

$$\iint_D \sin(\pi y^2)dxdy$$

(新潟大 2020) (m20202005)

0.224 次の重積分を，積分の順序を変えて，<u>2 通り</u> に計算せよ.

$$\iint_D 2x^2y\ dxdy, \qquad D=\{(x,y)\ ;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\ \}$$

(新潟大 2022) (m20222010)

0.225 $D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ x+y\leqq 1\ ,\ \ x\geqq 0\ ,\ \ y\geqq 0\ \right\}$ とするとき，次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

(長岡技科大 1992) (m19922104)

0.226 (1) xy 平面における領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x+y\leqq\ 1\ ,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1\}$ を図示せよ.

(2) (1) の D に対して重積分 $\displaystyle\iint_D (x-y)\ e^{x+y}\ dxdy$ を求めよ.

(長岡技科大 1998) (m19982104)

0.227 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ を求めなさい.

(2) xy 平面で，$t\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 2t$ を満たす部分を D_t とする．D_t の概形をかき，その面積を求めなさい.

(3) t が正の実数の範囲を動くとき，2 重積分 $V(t)=\displaystyle\iint_{D_t} e^{-x^2-y^2}dxdy$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2009) (m20092103)

0.228 xy 平面上において, $0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1$ で表される領域を D とし, $-x\leqq\ y\leqq\ -x+1,\ x\leqq\ y\leqq\ x+1$ で表される領域を E とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) E の概形を描き, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_E (x+y)^2\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2010) (m20102103)

0.229 xy 平面において，$x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ 1$ で表される領域を D とする．以下の問いに答えなさい.

(1) D の概形をかき，その面積を求めなさい．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2012)　　(m20122102)

0.230 xy 平面において，領域 $S,\ T$ を

$$S\ :\ x^2+y^2 \leqq 1$$
$$T\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x$$

と定義する．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)dxdy$ を求めなさい．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202103)

0.231 xy 平面において，D を不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$$

で表される領域とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ を求めなさい．

(2) $s=x+y,\ t=x-y$ とおくとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212103)

0.232 xy 平面において，領域 D を

$$D\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$$

と定義する．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ を求めなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 r\log r\ dr$ を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2023)　　(m20232103)

0.233 xy 平面上で $x^2+y^2 \leqq 1,\ \ x \geqq 0,\ \ y \geqq 0$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ の値を求めなさい．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D y^2dxdy$ の値を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D |y-x|\,dxdy$ の値を求めなさい．

(長岡技科大 2024)　　(m20242104)

0.234 a を正の実数とし，xy 平面上の領域 D_a を $D_a = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a\right\}$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ の値を求めなさい．

(3) 等式 $\displaystyle\iint_{D_a} xye^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_0^a xe^{-x^2}dx\right)^2$ が成り立つことを示しなさい．

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$ の値を求めなさい．

(長岡技科大 2025)　　(m20252101)

0.235 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ に対して，ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1} \sqrt{x^2+y^2}\,\exp\Bigl(-\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)^3\Bigr)dxdy$$

を求めよ．ただし，$\exp(t) = e^t$ である．

(金沢大 1999)　　(m19992204)

0.236 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ (a, b は正定数) に対して，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，(x, y) の動く領域 D を図示せよ．

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002202)

0.237 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに　$D = \left\{(x, y)\ :\ y \geq x \geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$　とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012202)

0.238 不等式 $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を利用して次の問いに答えよ．

ただし，$D_1 = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$D_2 = \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 2\}$ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}$ を示せ．

(金沢大 2002)　　(m20022202)

0.239 関数 $f(x, y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a)=\left\{(x,y)|1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ a\right\}\ (a>1)$ に対して $\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032202)

0.240 閉領域 $D(R)=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ R^2\}\ (R>1)$ に対して，

$$I_a(R)=\iint_{D(R)}\frac{1}{(x^2+y^2)^a}dxdy\quad(a>0)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(R)$ を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I_a(R)$ を調べよ.

(金沢大 2004)　　(m20042202)

0.241 領域 $D(R)=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ R^2\ ,\ y\geqq\ |x|\right\}\ (R>0)$ に対して

$$I(R)=\iint_{D(R)}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $I(R)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I(R)$ を求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052203)

0.242 a,b は正の実数とする.

(1) $\dfrac{x}{a}=r\cos\theta,\ \dfrac{y}{b}=r\sin\theta\quad(0<r\ ,\ 0<\theta<2\pi)$ とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}$$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ を計算せよ. ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geqq\ 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\ 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005)　　(m20052207)

0.243 関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad((x,y)\neq(0,0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0<\varepsilon<1$ とする. 積分 $\displaystyle I(\varepsilon)=\iint_{\varepsilon\leqq\ \sqrt{x^2+y^2}\leqq\ 1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}(\sin\varepsilon)I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062203)

0.244 領域 $D(\varepsilon)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1-\varepsilon,\ |y|\leqq\ x\}\quad(0<\varepsilon<1)$ に対して
$\displaystyle I(\varepsilon)=\frac{2}{\pi}\iint_{D(\varepsilon)}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ. (2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ. (3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072203)

0.245 $D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ とする．次の積分の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ (2) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dxdy$

(金沢大 2007) (m20072207)

0.246 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leq n^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.

(2) 集合 $R_n=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leq x\leq n,\ 0\leq y\leq n\}$ に対して，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right)=0$ となることを示せ.

(3) 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007) (m20072212)

0.247 (1) 変数変換 $x=u,\ y=uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D=\{(x,y)\mid 1\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq x\}$ を求めよ.

(3) $R>1$ とし，$D_R=\{(x,y)\mid 1\leqq x\leqq R,\ 0\leqq y\leqq x\}$ とおく．実数 α について，極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\frac{x^{\alpha}}{x^2+y^2}dxdy$ が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2008) (m20082203)

0.248 $D=\{(x,y)\,;\ 0\leq y<x\leq 1\}$ とする．$0<\alpha<1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2-y^2)^{\alpha}}dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2008) (m20082207)

0.249 次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．ただし，$a,\ b$ は正の定数とする.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ を求めよ.

(金沢大 2009) (m20092203)

0.250 (1) $x=u\cosh v,\ y=u\sinh v$ とおく.

$$1\leqq u\leqq 2,\ -\infty<v<\infty \text{ のとき } x\geqq 1,\ 1\leqq x^2-y^2\leqq 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v=\dfrac{e^v+e^{-v}}{2},\ \sinh v=\dfrac{e^v-e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x=u\cosh v,\ y=u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2-y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D=\left\{(x,y)\,|\,x\geqq 1,\ 1\leqq x^2-y^2\leqq 4\right\}$ とする.

(金沢大 2010) (m20102203)

0.251 次の広義積分を計算せよ.

(1) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x, y \geqq 0\right\}$ とするとき

$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\, dxdy\ .$$

(2) $E = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x, y \geqq 0,\ x+y \leqq 1,\ (x,y) \neq (0,0)\right\}$ とするとき

$$\iint_E \log(x+y)\, dxdy\ .$$

(金沢大 2010)　　(m20102208)

0.252 関数 $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) $D_a = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2 \leqq x^2+y^2 \leqq a^2\}$ とする.

$$\lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy$$

を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112203)

0.253 (1) 変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 2} \log(1+x^2+y^2)\, dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012)　　(m20122203)

0.254 $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ とし，

$$D_\varepsilon = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq (\tan\varepsilon)x\right\},$$

$$I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} xy^2 dxdy$$

とおく．次の問いに答えよ.

(1) D_ε を図示せよ.

(2) I_ε を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{-3}(I_\varepsilon - a) = b$ となる定数 a, b を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132208)

0.255 $D = \left\{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leqq x,\ y \geqq 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 極座標による変数変換を用いて，2 重積分

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2014)　　(m20142203)

0.256 $D\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid -1\leqq x+y\leqq 1,\ y-x\leqq 1\right\}$ とするとき, 広義積分

$$\iint_D (x^2-y^2)^2 e^{y-x}dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2014)　　(m20142206)

0.257 (1) $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ を示せ．ここで，$\sin^{-1}x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad (r>0,\ 0<\theta<2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ．ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{1}{4}\leqq x^2+y^2\leqq\dfrac{3}{4},\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ とする.

(金沢大 2015)　　(m20152203)

0.258 有界閉領域 D,E を

$$D=\left\{(x,y)\in R^2\ \middle|\ \frac{1}{2}\leqq x^2+y^2\leqq x\right\},$$

$$E=\left\{(r,\theta)\in R^2\ \middle|\ -\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq r\leqq\cos\theta\right\}$$

とする．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 写像 $T:R^2\to R^2$ を

$$T(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする．$(r,\theta)\in E$ のとき $T(r,\theta)\in D$ であることを示せ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2015)　　(m20152208)

0.259 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=xi+yj+zk$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，曲面 S の面要素を dS，dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい．ただし $y\neq 0$ とする.

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して，以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS=4\pi$$

(4) (3) の関係式が，原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015)　　(m20152210)

0.260 λ を実数, $t > 0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq t^2\right\}$$

上の重積分

$$I(t) = \iint_{D_t} (1 + x^2 + y^2)^\lambda dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ.

(2) $t \to \infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.261 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \leqq x + y \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) 変数変換 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{2}v \\ y = \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換で，領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする．領域 E を図示せよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^3} dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162208)

0.262 平面 $x + y + z = 1$ が座標軸と交わる点を A, B, C，3 点 A, B, C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで，原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする.

(金沢大 2016)　　(m20162211)

0.263 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$ を求めよ.

(2) 集合 $\left\{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\right\}$ を R_n と表すとき,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \right) = 0$$ を示せ.

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(金沢大 2016)　　(m20162216)

0.264 a, b, c は正の定数とし，x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2\right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時,
関数行列式（ヤコビアン）$\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.265 重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{y} dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \in R^2 \;\middle|\; 1 \leq xy \leq 6,\ 0 < y \leq x \leq 4y\right\}$$

を考える．次の各小問に答えよ．

(1) 変数 u, v を用いて，変数変換 $x = uv,\ y = u/v$ を行なう．このときヤコビアンを求めよ．

(2) (1) の変数変換を用いて I の値を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162224)

0.266 関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) 領域 $D = \left\{(x,y) \middle| 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2+y^2 \geqq 1,\ x \leqq 1\right\}$ を図示せよ．

(3) (2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \left\{f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)\right\} dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2017)　　(m20172208)

0.267 実数 $t\,(0 < t < 1)$ に対して，集合 R_t を

$$R_t = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ t \leqq x+y \leqq 1\right\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t} \frac{dxdy}{x+y}$ の値を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+0} \iint_{R_t} \frac{dxdy}{(x+y)^\lambda}$ が存在するような，実数 λ の範囲を求めよ．

(金沢大 2018)　　(m20182205)

0.268 関数 $f(x,y) = (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ 上で点 $(1, 0, f(1,0))$ における接平面の方程式を $z = ax + by + c$ と表すとき，定数 a, b, c を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ．

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい．

$$\iint_D f(x,y) dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.269 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ とし，$x \neq 0$ となる (x,y) に対して関数 $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x,y) - f_x(x,y)$ と $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ に対し

$$D_a = \left\{(x,y) \;\middle|\; a^2 \leqq x^2+y^2,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a = \iint_{D_a} \left\{f_y(x,y) - f_x(x,y)\right\} dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0} I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.270　次の問いに答えよ.

(1)　実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ.

(2)　$L>1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 1\leqq x^2+y^2\leqq L^2\right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L\to\infty}\iint_{D_L}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ.

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.271　$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=(x^2-y^2)e^{2x}$$

について，次の問いに答えよ.

(1)　$f(x,y)$ のすべての極値を求めよ.

(2)　$\boldsymbol{R}^2$ の 4 点 $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$ を頂点とする正方形の周および内部を D とする．このとき，重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2020)　　(m20202204)

0.272　(1)　集合 $D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y|\le 1\right\}$ の概形を描け.

(2)　(1) で定義した D に対して積分　$\displaystyle\iint_D (x-y+1)\,e^{x+y}\,dx\,dy$　を求めよ.

(3)　$\max\{u,v\}=\begin{cases} u & (u\ge v) \\ v & (u<v)\end{cases}$　とする．積分　$\displaystyle\int_0^3\left(\int_0^1 e^{\max\{x^2,9y^2\}}dy\right)dx$　を求めよ.

(金沢大 2020)　　(m20202206)

0.273　領域 $D=\left\{(x,y) \;\middle|\; |y|\le e^{-x^2}, x\ge 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D xy^2dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2021)　　(m20212203)

0.274　$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=x^2+y^2+\sqrt{3}x-3y$$

について，次の問いに答えよ.

(1)　f のすべての極値を求めよ.

(2)　閉領域 $D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\leqq 9,\ y\geqq 0\right\}$ における f の最大値と最小値を求めよ.

(3) (2) の D に対して，重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212209)

0.275 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する．

$$D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x\right\}$$

以下の問いに答えよ．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 関数 $g(x,y) = \dfrac{1}{(y-2)\cos x}$ は，D 上の連続関数であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y^2}{\cos^6 x}dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222202)

0.276 閉領域 $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222209)

0.277 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (x^2, y^2, 1)$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めなさい．

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

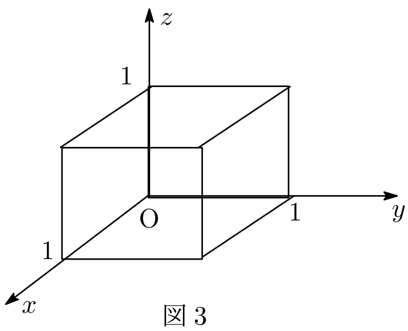


図 3

(金沢大 2022)　　(m20222213)

0.278 次の重積分の値を極座標を用いて求めよ．

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x,y \geq 0}} xydxdy$$

(富山大 2004)　　(m20042304)

0.279 以下の問に答えよ．

(1) 変数変換

$$x = r\cos\theta \qquad (r \geq 0)$$
$$y = r\sin\theta$$

により，$(x, y) = (2, 2)$ に対応付けられる (r, θ) 平面の点の座標を求めよ．また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ.

(2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

を求めよ.

(富山大 2005) (m20052305)

0.280 $E = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2x + 2y - 1\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_E (xy - y)dxdy$$

(富山大 2005) (m20052310)

0.281 次の二重積分を求めよ， $1024\iint_D xydxdy \qquad \left(D\,;\, x^2 \leq y \leq \dfrac{x}{2}\right)$

(富山大 2007) (m20072306)

0.282 変数変換 $t = x - y,\ s = x + y - 2$ により，重積分

$$\iint_D (x + y)dxdy \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y,\ y \leq x \leq 2 - y\}$$

の値を求める．以下の問いに答えよ.

(1) x と y をそれぞれ，t と s で表し，$\dfrac{\partial x}{\partial t}, \dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial t}, \dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて，$\iint_D (x + y)dxdy$ を t と s で変数変換し，その値を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} (x + y)dxdy$ の値を求め，(3) の結果と一致することを確かめよ.

(富山大 2008) (m20082304)

0.283 $A = \left\{ (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqq z \leqq 1 - x^2 - y^2 \right\}$ とするとき, 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_A 2z(2x^2 - y^2)\, dxdydz$$

(富山大 2010) (m20102310)

0.284 4 重積分

$$\iiiint_D x_1 dx_1\ dx_2\ dx_3\ dx_4$$

の値を求めよ.

ただし，$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 \leqq 1,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0 \right\}$ とする.

(富山大 2015) (m20152304)

0.285 $D=\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \sin y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ のとき，二重積分 $\displaystyle\iint_D x dxdy$ の値を求めよ．

(富山大 2018) (m20182304)

0.286 次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \quad (D\ :\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y)$$

(富山大 2022) (m20222303)

0.287 次の二重積分の積分値を求めよ．

$$\iint_D e^{y^2}dxdy \quad \left(D\ :\ x \geqq 0,\ y \leqq 1,\ y \geqq \frac{1}{2}x\right)$$

(富山大 2023) (m20232303)

0.288 以下の問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと．

領域 $D=\{(x,y) \mid 0 \leq x-y \leq 1,\ \ 1 \leq 2x+y \leq 2\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D e^{3x}\ dxdy$$

(富山大 2024) (m20242303)

0.289 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D 2x|y|\ dxdy, \quad D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ x^2+y^2 \leqq 2x\}$$

(福井大 2001) (m20012409)

0.290 $\displaystyle\iint_R \left(y-x^3\right)dxdy\,, \quad \left(R\ :\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2\sqrt{x}\right)$ の値を求めよ．

また積分領域 R も図示せよ．

(福井大 2012) (m20122409)

0.291 $I=\displaystyle\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (R\ :\ 0 \leq x^2+y^2 \leq a^2)$ の値を求めよ．さらに，$a \to \infty$ としたときの I の値を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ．

(福井大 2015) (m20152406)

0.292 領域 D を，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ とする．このとき，$\displaystyle\iint_D dxdy$ の値を求めよ．

(福井大 2015) (m20152432)

0.293 以下の積分をおこないなさい．

$$\iint_D dxdy \qquad \text{ただし，} D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

(福井大 2016) (m20162422)

0.294 次の重積分を計算せよ．ただし，D は $x^2+y^2=2$ と $y=x^2$ で囲まれた領域である．

$$\iint_D ydxdy$$

(福井大 2021) (m20212405)

0.295 次の積分の値を計算せよ．

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\,, \quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022) (m20222416)

0.296 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.297 次の重積分を計算せよ．

$$\iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad R\ :\ x^2+y^2 \leq 1$$

(福井大 2023)　　(m20232405)

0.298 xy 平面上の領域 $D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ に対し，以下の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy\ dxdy$$

(福井大 2023)　　(m20232426)

0.299 変数変換 $x+y=s$, $x-y=t$ を利用して次の積分を求めよ．

$$\iint_D (x^2-y^2)dxdy \qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ 0 \leq x+y \leq 1,\ \ 0 \leq x-y \leq 1\right\}$$

(福井大 2025)　　(m20252403)

0.300 閉領域 $D = \{(x, y)|4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ y \leqq x\}$ を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042505)

0.301 (1) 有理関数 $\dfrac{1}{x^3+8}$ を部分分数に分解し, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\,dx$ を求めよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)(2x-y)^2 dxdy$,　$D = \{(x, y) \mid 1 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ -1 \leqq\ 2x-y \leqq\ 1\}$ の値を求めよ．

(静岡大 2005)　　(m20052502)

0.302 $a > 0$ とし，$D(a) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\}$ とおく．
このとき 2 重積分　$I(a) = \displaystyle\iint_{D(a)} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$　について，次の問いに答えよ．

(1) $D(a)$ を図示し，$I(a)$ の値を求めよ．　　(2) $\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062505)

0.303 重積分 $\iint_D (-2x+y)dxdy$ を求めよ．ただし，$D=\{(x,y) \mid -1 \leqq x,\ 2x+1 \leqq y \leqq 3\}$ とする．

(静岡大 2007)　　(m20072505)

0.304 以下の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\log x}{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{5+x^2}$

(3) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y) \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$

(静岡大 2008)　　(m20082502)

0.305 以下の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\ ,\ 0 \leq x\ ,\ 0 \leq y\}$

(静岡大 2009)　　(m20092504)

0.306 次の 2 重積分を求めよ. また, 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+1}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ x-1 \leqq y \leqq 1-x\ ,\ 0 \leqq x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq e^2\right\}$

(静岡大 2010)　　(m20102502)

0.307 次の 2 重積分を求めよ．また，積分領域 D を図示せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xe^y\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2 \leqq y \leqq x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$

(静岡大 2011)　　(m20112502)

0.308 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0 \leqq y \leqq 1\ ,\ \sqrt{y} \leqq x \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0 \leqq y \leqq 1\ ,\ -1 \leqq x \leqq -y\right\}$

(静岡大 2012)　　(m20122501)

0.309 次の積分を計算せよ．積分領域 D を図示せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\sin(x^2+y^2)\,dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{\pi}{3} \leqq x^2+y^2 \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$

(静岡大 2013)　　(m20132505)

0.310 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\right\}$ を求めなさい．

(静岡大 2013)　　(m20132509)

0.311 変数 (r,θ) $(r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ から変数 (x,y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．また領域 D を

$$D = \{(x,y) \quad ;\ -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する．

(1) (x,y) が領域 D を動くとき (r,θ) が動く範囲を求めよ．また，その対応が 1 対 1 であることを示せ．

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_D \exp(-x^2-y^2-xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である．

(岐阜大 1997)　　(m19972601)

0.312 3 点 $(0,0),(1,0),(1,1)$ を頂点とする三角形を D とする．次の重積分を求めよ．

$$\iint_D xy\ dxdy$$

(岐阜大 2003)　　(m20032604)

0.313 次の多重積分を計算せよ.

$$\iint_D |\ 3x\ |\ dxdy \qquad\qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a,b>0)$$

(岐阜大 2004)　　(m20042602)

0.314 関数 $y=-x^2+9$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分を D とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (x^2+2y)dxdy$$

(岐阜大 2006)　　(m20062606)

0.315 次の重積分を計算せよ．ただし，D は xy 平面上，原点中心で半径 1 の円板とする.

$$\iint_D |\ x+y\ |dxdy$$

(岐阜大 2007)　　(m20072604)

0.316 (1) n は自然数とする．a,b,c,d を $ad-bc \neq 0$, $c \neq 0$ を満たす定数としたとき，関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の n 階導関数を求めよ.

(2) $D=\{(x,y)\ |\ 1 \leqq\ x^2 \leqq\ y \leqq\ 4-x^2,\ 0 \leqq\ x\}$ としたとき，次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y}\,dxdy$$

(岐阜大 2009)　　(m20092603)

0.317 重積分

$$I=\iint_D x\log(x^2+y^2)\,dxdy\ , \qquad D\,:\,x\geqq\ 0,\ 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4$$

の値を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(岐阜大 2011) (m20112602)

0.318 $F(x)$ はすべての x において 2 回微分可能な関数で，$F'(x)=f(x)$ とする．このとき置換微分法により

$$I=\int_a^b xf(x^2)dx$$

の値を F を用いて表せ．ただし，a,b は正の定数とする．また，重積分

$$J=\iint_D \frac{xyf(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\quad D\ :\ x,y\geqq\ 0,\ p^2\leqq\ x^2+y^2\leqq\ q^2$$

の値を F を用いて表せ．ただし，p,q は正の定数とする．

(岐阜大 2011) (m20112606)

0.319 a,b を正の実数とする．次の広義積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_D \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}}\,dxdy\ , \qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$$

(岐阜大 2012) (m20122602)

0.320 次の重積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_D \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}dxdy\ ,\quad D=\big\{(x,y)\ :\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 5\big\}$$

(岐阜大 2017) (m20172603)

0.321 次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D e^{x+y}dxdy \quad \Big(D=\Big\{(x,y)\ \Big|\ 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 1\Big\}\Big)$$

(豊橋技科大 2021) (m20212703)

0.322 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2ydxdy\ , \qquad D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq x,\ 0\leqq x\leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ , \qquad D=\big\{(x,y)\ \big|\ x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0\ \big\}$

(豊橋技科大 2022) (m20222703)

0.323 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\sin(x+y)dxdy,\quad D=\Big\{(x,\ y)\ \Big|\ x+y\leqq\pi,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\Big\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy,\quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \left|x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right|\leqq 1,\ \left|x+\frac{1}{\sqrt{3}}y\right|\leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2023) (m20232703)

0.324 次の定積分および 2 重積分を求めよ．

ア. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

イ. $\displaystyle\iint_D (4x^2-y^2)dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |2x-y|\leqq 1,\ |2x+y|\leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2025)　(m20252703)

0.325 領域 D : ${r_1}^2 \le x^2+y^2 \le {r_2}^2 \quad (0<r_1<r_2)$ における重積分
$\displaystyle\iint_D (a+bx+cx^2+fxy+cy^2)dxdy$ を求めよ. ただし, a , b , c , f は定数である.

(名古屋大 2005)　(m20052803)

0.326 次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，D は，$y=0,\ y=\dfrac{x}{2},\ y=3-x$ で囲まれた領域とする.

$$\iint_D \frac{2x}{y+1}\,dxdy$$

(名古屋大 2024)　(m20242805)

0.327 $D=\{(x,y): y^2\le x\le y\}$ として次の積分の値を求めなさい.

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(名古屋工業大 1998)　(m19982904)

0.328 次の積分の値を求めよ．$\displaystyle\iint_K (3x^2+2y)dx\,dy$,　$K: x^2\le y\le 2-x$

(名古屋工業大 1999)　(m19992903)

0.329 (1) 二次元平面上の第一象限において $0\le x^2+y^2\le R$ によって定められる部分を A とする．次の A 上での重積分を求めよ． $a>0$ とする.

$$\iint_A e^{-(ax)^2-(ay)2}dx\,dy$$

ただし，次の変数変換を用いて計算を行うこと.

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2}dx$$

(名古屋工業大 1999)　(m19992904)

0.330 $D=\{(x,y)|0\le y\le x,\ x^2+y^2\le a^2\}$ のとき，　$I=\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$
を求めよ．ただし a は正の定数とする.

(名古屋工業大 2001)　(m20012904)

0.331 xy 平面の 5 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(0,2)$ を頂点とする 5 角形が作る閉領域を D とする. 重積分

$$\iint_D ydxdy$$

を求めよ.

(名古屋工業大 2004)　(m20042903)

0.332 次の重積分を変数変換の公式を用いて計算せよ.

$$\iint_D 2(x+y)^6(x-y)^8dxdy\ ,\qquad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\leqq\ 1\}$$

(名古屋工業大 2006)　(m20062904)

0.333 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ のとき，重積分　$V = \iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dxdy$　を求めよ．
ただし，$\max(x^2, y^2)$ は x^2, y^2 の小さくない方を表す．
（ヒント：領域 D を $x > y$ と $x \leq y$ の二つの部分に分けて積分を考えること）

(名古屋工業大 2006)　　(m20062906)

0.334 $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax = 0,\ y > 0\}$ $(a > 0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする．

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ．

(2) 領域 $D = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax \leq 0,\ y \geq 0\}$ を極座標で表せ．

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ．　$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082904)

0.335 (1) 次の累次積分 I を計算しなさい．

$$I = \int_0^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{3(x^2+5)}} \frac{1}{x^2 + y^2 + 5}\, dy \right\} dx$$

(2) 次の 2 重積分 J を指示に従って計算しなさい．

$$J = \iint_D e^{-(x^2 - 2xy + 4y^2)}\, dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(a) 変数変換 $s = x - y\ ,\ t = \sqrt{3}y$ により D が st 平面内の集合 K に移されるとき，J を (s, t) 変数の 2 重積分として表しなさい．ただし K を具体的に表示する必要はない．

(b) (a) の集合 K を求めなさい．

(c) さらに st 平面における極座標変換を行って J の値を計算しなさい．

(名古屋工業大 2010)　　(m20102904)

0.336 次の積分の値を求めよ．

$$I_2 = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}\, dxdy\ , \quad D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\ ,\ x + y \geqq 0\right\}$$

(名古屋工業大 2011)　　(m20112905)

0.337 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \log(x + y) dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122905)

0.338 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)} dxdy\ , \quad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq \sqrt{3}y \leqq x\ ,\ x^2 + y^2 \leqq 5\right\}$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132902)

0.339 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xye^{x+y} dxdy\ , \quad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1\right\}$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142902)

0.340 重積分 $I=\iint_D x\,dxdy$, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq x-1\right\}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152904)

0.341 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2\right\}$$

(名古屋工業大 2016) (m20162903)

0.342 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}dx$

(2) $I_2=\displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{1+\sin^2 x}dxdy,\qquad D\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(名古屋工業大 2017) (m20172902)

0.343 重積分 $I=\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182904)

0.344 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}}\qquad \text{ただし}\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2x^2-1 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202904)

0.345 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 3,\ x+y \geqq 0\right\}$ において，重積分

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2+1}dxdy$$

の値を求めよ.

(名古屋工業大 2021) (m20212903)

0.346 xy 平面上で，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸，直線 $y=1$，直線 $y=2$ で囲まれる領域を D とする．このとき，次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022) (m20222904)

0.347 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする.

$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232903)

0.348 領域 $D=\{x^2+y^2 \leqq 1\}$ において，重積分

$$\iint_D \frac{|y|}{x^2+1}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(名古屋工業大 2024) (m20242904)

0.349 次の重積分の値を求めよ.

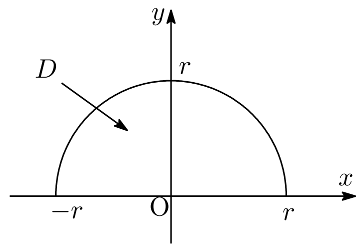
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(60-4x+y-x^2)^3}} \qquad ただし \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2 \leqq y \leqq 2x+3\right\}$$

(名古屋工業大 2025) (m20252904)

0.350 平面図形 D が xy 平面内に存在するとき, 図形 D の図心の y 座標を $\overline{y}$ とすると,

$\overline{y}=\dfrac{1}{S}\displaystyle\iint_D ydxdy$ （ただし, S は図形 D の面積）

で与えられる. これを用いて, 図に示すような半円（半径 r）の図心の y 座標を求めよ.



(三重大 2004) (m20043107)

0.351 以下の重積分の値を求めなさい. $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq 1,\quad x>0,\quad y>0$

(三重大 2007) (m20073105)

0.352 xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\ :\ x+y<1,\ 0<x,\ 0<y\}$ で定義された関数 $f(x,y)=xy(1-x-y)$ について考える.

(1) D における $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 (x_0,y_0) を求めよ.

(2) D での積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2007) (m20073118)

0.353 xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqq x,\ 0\leqq y,\ x^2+y^2\leqq 1\}$ で関数 $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ を考える.

(1) 領域 D における関数 $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ.

(2) 領域 D での積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2011) (m20113108)

0.354 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_R xy\,dxdy \quad (R\ :\ x^2+y^2\leqq 9 \text{ かつ } x\geqq 0)$$

(三重大 2011) (m20113113)

0.355 次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D xy^2\,dxdy \qquad \big(D\ :\ 0\leqq x\leqq y\leqq 1\big)$$

(三重大 2012) (m20123105)

0.356 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w}=(0,0,\omega)$ （ただし, ω は定数）を考える. 以下の問に答えよ.

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{w}\times\ \boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする. C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ. ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである.

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D(\nabla\times\ \boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_z\,dxdy$ を計算せよ.

(三重大 2013)　　(m20133116)

0.357 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$$

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2=\iint_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I=\sqrt{\pi}$ であることを示せ.
ただし, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ であり, $dxdy=rdrd\theta$ である.

(奈良女子大 2010)　　(m20103204)

0.358 $D=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2\ \leqq a^2\right\}$ として，次式を求めよ.

$$\iiint_D z^n\,dx\,dy\,dz \qquad （n は自然数）$$

(京都大 1995）　　(m19953303)

0.359 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D(2x+3y)dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geq x^2,\ x\geq y^2\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq 2x\right\}$

(京都大 2025)　　(m20253309)

0.360 領域 $D=\{(x,y):\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 1\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq 2\}$ に対して重積分

$$\iint_D\frac{2xy}{x^2+y^2}dx\,dy$$

の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003407)

0.361 直線 $y=x$ と放物線 $y=-x^2+2x$ で囲まれた領域 D を図示し，D 上の重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013406)

0.362 媒介変数表示された曲線 $C\ :\ x=3\cos t\,,\ y=2\sin t\ \ (0\leqq\ t\leqq\ 2\pi)$ を図示し，この曲線で囲まれた図形 D 上の重積分 $\displaystyle\iint_D(xy+1)dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023406)

0.363 領域 $D=\{(x,y):0\leqq\ x\leqq\ 1,0\leqq\ y\leqq\sqrt{x}\}$ 上で重積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{x}(x+y)dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2003) (m20033407)

0.364 閉領域 $D=\{(x,y)\ :\ 1\leqq\ x\leqq\ 2,\ x\leqq\ y\leqq\ x^2\}$ を図示して, 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D(x^2+2y)dxdy$$

(京都工芸繊維大 2004) (m20043403)

0.365 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 8\,,\ y\geqq\ 0\}$$

(京都工芸繊維大 2005) (m20053403)

0.366 領域 $D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq\ x\leqq\ 1\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ x^2\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{x}{1+y}dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063409)

0.367 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{xy^2}{1+x^2+y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.
ただし，$D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$ とする.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083404)

0.368 xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{\pi}{2}\leqq\ x\leqq\pi\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ x^2\right\}$$

に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D\sin\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010) (m20103404)

0.369 xy 平面上の図形 D : $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi\,,\ 0\leqq\ r\leqq\ e^{\theta})$ に対して,

重積分 $\displaystyle\iint_D 1dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133404)

0.370 xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\ x^2\right\}$$

に対して．重積分

$$I=\iint_D\sqrt{x^3+1}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2015) (m20153403)

0.371 xy 平面上の関数 $f(x,y)=x^3+6xy+3xy^2$ について，次の問いに答えよ.

(1) 重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq x,\ 0\leqq x\leqq 1\}$ とする.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223403)

0.372　xy 平面内の図形

$$D\ :\ 0 \leqq y \leqq x \leqq 2$$

を考える．重積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2}dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2023)　　(m20233405)

0.373　次の積分の積分値を求めよ．

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy \qquad \text{（ただし，積分領域 } D : x^2+y^2 \leq 1 \text{ である．）}$$

(大阪大 1995)　　(m19953505)

0.374　S は $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq a^2$ となる領域である．ただし， $a>0$ とする．

(1) 次の関係が成り立つことを示せ．

$$\iint_S f(x)\,dx\,dy = \iint_S f(y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_S \big(f(x)+f(y)\big)\,dx\,dy$$

(2) $\displaystyle\iint_S x^4\,dx\,dy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_S x^6\,dx\,dy$ を求めよ．

(大阪大 1998)　　(m19983501)

0.375　(1) 空間上の直交座標 (x,y,z) を極座標 (r,θ,φ) ：

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\quad (r>0,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい．

(2) 広義積分　$\displaystyle I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}dx\,dy\,dz$

について，$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分　$\displaystyle J(\alpha,\ \beta)=\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\mid\log(x^2+y^2+z^2)\mid^{\beta}}dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．

ただし，$B=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2<\dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.376　曲線 $y=f(x)$, x 軸，直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた領域の重心 $(\overline{x},\overline{y})$ を考える．ただし，区間 $[a,b]$ で $f(x)\geq 0$ とする．

(1) 上記の領域を D とするとき，$\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{\displaystyle\iint_D xdxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}$$

で定義される．

$$\overline{x}=\frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

となることを証明せよ．

(2) 同様の形式で $\overline{y}$ を求めよ．

(3) $f(x) = \exp(-x/3)$ で区間が $[0, 1]$ となるときの重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ．ただし，exp は指数関数を表すものとする．

(大阪大 2011)　　(m20113505)

0.377 関数 $w(t)$ は初期条件「$t = 0$ のとき $w = 3$」をみたす微分方程式

$$\frac{dw}{dt} = \frac{t}{w}$$

の解とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $w(t)$ を求めよ．

(2) 関数 $w(t)$ を用いて，2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{3}{7}w(x + y) + \frac{1}{17}w(x - 2y)^2$$

と定める．次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D f(x, y)dxdy\ , \quad D = \big\{(x, y)\ \big|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 4\big\}$$

(大阪大 2020)　　(m20203505)

0.378 原点を中心とした半径 r $(r \neq 0)$ の球面 S は媒介変数 $u,\ v$（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\big(= \boldsymbol{r}(u,\ v)\big) = r\,\boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\,\boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\,\boldsymbol{i}_y + r\sin v\,\boldsymbol{i}_z$$
$$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x,\ \boldsymbol{i}_y,\ \boldsymbol{i}_z$ は $x,\ y,\ z$ 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ を $r,\ \boldsymbol{i}_r,\ v$ で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分，

$$\iint_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.379 a を正の定数とし，$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ の表す xy 平面上の閉曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C の長さを求めよ．

(2) 閉曲線 C が囲む閉領域を D とする．$u = sx,\ v = sy$ $(0 \leq s \leq 1)$ として，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\iint_D dudv = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right|dt$$

(3) (2) の結果を用いて，閉曲線 C が囲む閉領域 D の面積を求めよ．

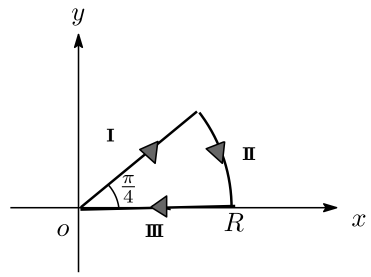
(4) 閉曲線 C 上の点における接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ を x と y のみで表せ．

(5) 正の値の a を変化させたとき，異なる値の a に対する曲線 C の集合を曲線族 $\{C_a\}$ とする．曲線 C_R が曲線族 $\{C_a\}$ のすべての曲線との交点において直交するとき，これを曲線族 $\{C_a\}$ の直交曲線と呼ぶ．

(4) の結果に基づいて，この直交曲線 C_R を解とする 1 階微分方程式を x, y, $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて示し，その一般解を陰関数として求めよ．なお，2 曲線の直交とは，2 曲線の交点において各々の接線が直交することを意味する．

(大阪大 2024)　　(m20243502)

0.380 複素数 $z = x + iy$ （i は虚数単位とする）を変数とする複素関数 e^{-z^2} を右図に示す複素平面上の扇形の領域を囲う閉じた経路 **I**, **II**, **III** に沿って積分すると，以下の式 (a) が成立する．



$$\int_{\mathbf{I}} e^{-z^2} dz + \int_{\mathbf{II}} e^{-z^2} dz + \int_{\mathbf{III}} e^{-z^2} dz = 0 \cdots\cdots (a)$$

(1) 式 (a) が成立するのはコーシーの積分定理による．コーシーの積分定理について以下に答えよ．複素平面上の領域 D で正則な複素関数 $f(z)$ の実部および虚部がそれぞれ連続微分可能な実関数 $u(x, y)$ および $v(x, y)$ によって与えられるものとする．C を領域 D 内の単一閉曲線とし，その内部が D に含まれるとき，以下が成り立つことを示せ．

$$\int_C f(z) dz = 0$$

なお，xy 平面において閉曲線 A で囲まれた領域 B では連続微分可能な実関数 $P(x, y)$ および $Q(x, y)$ について次式が成り立つことを用いてもよい．ただし，閉曲線 A に関する積分経路は領域 B が進行方向の左手にくるようにとるものとする．

$$\int_A (Pdx + Qdy) = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

(2) 式 (a) の経路 **I** に沿った積分を $r = |z|$ の積分として表せ．

(3) 式 (a) の経路 **II** に沿った積分について，$R \to \infty$ とした場合の $\left|\int_{\mathbf{II}} e^{-z^2} dz\right|$ の極限値を求めよ．なお，$\cos(2\theta) \geq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$ の関係を用いてもよい．

(4) (2), (3) の結果および実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ を用いて実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2) dx$ を求めよ．

(大阪大 2024)　　(m20243503)

0.381 a を正の実数とし，I, D を

$$I = \left\{x \;\middle|\; 0 \leqq \sqrt{x} \leqq a\right\},$$

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq a\right\}$$

と定める．以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_I \log\left(1 + \sqrt{x}\right) dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D dxdy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2-2y)dxdy$ を求めよ.

(大阪大 2025)　　(m20253505)

0.382 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1\ ,\ 0\leq y\leq 1-x\}$ とするとき，次の積分を求めよ．

$$\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$$

（大阪府立大 2001）　　(m20013602)

0.383 次の積分 (1),(2) の値を求めよ．ただし，集合 D,E を正の実定数 $R,\ a,\ b,\ c$ により

$$D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,x^2+y^2\leq R^2\right\},\quad E=\left\{(x,y,z)\in R^3\,|\,ax^2+by^2+cz^2\leq 1\right\}$$

と定める.

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$　　(2) $\displaystyle\iiint_E dxdydz$

(大阪府立大 2011)　　(m20113603)

0.384 領域 D を　$D=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1\right\}$　とするとき，次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.　　(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163609)

0.385 2 次元平面での領域 D を

$$D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 0\leqq x+y\leqq 1\}$$

とおく．このとき，各問に答えよ

(1) $x=u(1-v),\ y=uv$ とおく．点 (x,y) が領域 D 上を動くとき，この変換により点 (u,v) はどのような領域を動くか．uv 平面上で動きうる範囲を図示せよ.

(2) (1) の変換のヤコビ行列式の値を求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^{10}dxdy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2018)　　(m20183606)

0.386 3 次元空間内の単位球を B とおく．すなわち,

$$B=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2\leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ.

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dxdydz$$

の値を求めよ.

(大阪府立大 2019)　　(m20193607)

0.387 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+y)^2\,dx\,dy$

(2) $\displaystyle\iint_A (\,|x|+|y|\,)\,dx\,dy \quad \bigl(A=\bigl\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\big|\; |x|+|y|\leq 1\bigr\}\bigr)$

(神戸大 1997)　(m19973806)

0.388 $D=\bigl\{(x,y)\;\big|\;x^2+y^2\leq x, y\geq 0\bigr\}$ とするとき，

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

を求めよ．

(神戸大 1997)　(m19973807)

0.389 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)^4 dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+2xy+2y^2\leq 1\}$$

(神戸大 2001)　(m20013806)

0.390 R を正の実数とし，$D_R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq R^2\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分を計算せよ．　$\displaystyle I_R=\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I_R$ を求め，それを用いて，次の積分の値を計算せよ．　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(神戸大 2002)　(m20023802)

0.391 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \left(\,D=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\;:\;x^2+y^2\leq 1\}\,\right)$$

(神戸大 2003)　(m20033805)

0.392 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xdxdy, \qquad D:\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0$，ただし，$a,b>0$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy, \qquad D$ は 3 直線 $x=0, y=0, x+y=\pi/2$ で囲まれる三角形の内部

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy, \qquad D:x^2+y^2\leq a^2$

(神戸大 2003)　(m20033806)

0.393 $\varepsilon>0$ とし，$D_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$ とおく．このとき次の値を求めよ．

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}dxdy$$

(神戸大 2004)　(m20043804)

0.394 次の各問に答えよ．

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$ の値を求めよ．

(2) 次の D 上の重積分を, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変数変換することにより求めよ．

$$\iint_D x^2dxdy,\ \ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq x\}$$

(神戸大 2004)　(m20043805)

0.395 次の計算をしなさい．

(1) $\sin^{-1} x$ を sin の逆関数とするとき
$\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1})^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in Z)$

(3) $\displaystyle\iint_{x,y \geq 0,\, x+y \leq 1} xydxdy$

(4) $\displaystyle\iint_V e^{-x^2-y^2} dxdy$
ここで V は第 1 象限 $V = \{(x, y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ を表す.

(神戸大 2005)　　(m20053802)

0.396 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dydx \qquad (D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \mid\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\iint_D (|x| + |y|)\,dydx \qquad (D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \mid\ |x| + |y| \leq 1\})$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\,dydx \qquad (D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \mid\ x^2 + y^2 \leq 1\})$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\,dydx \qquad (D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \mid\ y \geq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\})$

(神戸大 2007)　　(m20073804)

0.397 以下の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq\ 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ x^2 + y^2 \leqq\ 1$

(3) $\displaystyle\iint_D (x - y)e^{x+y}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0 \leqq\ x + y \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ x - y \leqq\ 2$

(神戸大 2007)　　(m20073808)

0.398 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}} \quad (D = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tan^{-1} \frac{y}{x}$

(神戸大 2008)　　(m20083808)

0.399 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく. 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D |x|\,dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D |x + y|\,dxdy$

(神戸大 2009)　　(m20093810)

0.400 $D = \left\{(x.y)\ \middle|\ y \leq 3x\,,\ y \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}\,,\ y \geq \dfrac{1}{2}x\,,\ y \geq 3x - 10\right\}$

とするとき, D を図示し, 積分 $\displaystyle\iint_D (x - 2y)\,dxdy$ を計算せよ.

(神戸大 2010)　　(m20103808)

0.401 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \sin(\pi\,|x-y|)dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1+x^2+y^2)dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$

(神戸大 2011) (m20113806)

0.402 重積分

$$V = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy\ . \quad D = \{(x,y) \in R^2 \,|\, 1 \leqq\ x \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ y \leqq \sqrt{3}x\}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) D が変数変換 $x=u,\ y=uv$ によってどのような領域に写されるかを図示せよ.

(2) (1) の変数変換に対するヤコビアンを求めよ.

(3) V の値を求めよ.

(神戸大 2011) (m20113808)

0.403 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x \leq 1\right\}$$

(神戸大 2012) (m20123804)

0.404 領域 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^2+y^2 < 4,\ x+y > 0\right\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$$

を計算せよ.

(神戸大 2015) (m20153804)

0.405 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}dxdy$ の値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163804)

0.406 (1) $x = \sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ. $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq\ x+y \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ x,\ 0 \leqq\ y\right\}$

(3) 変数変換 $x = st,\ y = s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ. $E = \left\{(s,t) \;\middle|\; 1 \leqq\ s \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ t \leqq\ 1\right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする. $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}}dxdy$

(神戸大 2016) (m20163809)

0.407 $a,b,c > 0,\ V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ とするとき，積分 $I = \displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017) (m20173802)

0.408 xz 平面において，曲線 $z = \sqrt{8-x^2}$ (ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z = x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ.

(1) D の概形を描け.

(2) D の面積を求めよ.

(3) V の体積を求めよ.

(4) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017) (m20173810)

0.409 積分 $\displaystyle\iint_{x^2-xy+y^2\leqq 1}(x-y)^2dxdy$ の値を求めよ.

(神戸大 2018) (m20183804)

0.410 (1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ.

ただし，$D=\left\{(x,y)\mid x,y\in R,\ 0\leqq x^2+y^2<\infty\right\}$ とする.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ.

(神戸大 2018) (m20183809)

0.411 xy 平面の第 1 象限（$x\geq 0$ かつ $y\geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy=1$, $xy=9$ と 2 本の直線 $y=x$, $y=4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ.

(1) R の概形を書け.

(2) 変数変換 $x=\dfrac{u}{v}$, $y=uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u\geq 0$ かつ $v\geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け.

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_R\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dxdy$$

(神戸大 2019) (m20193804)

0.412 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x+y\leq 1\ .\ 1\leq 3x-2y\leq 2\}$ とする．次の各問いに答えよ.

(1) 領域 D の概形を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\left\{\log(3x-2y)\right\}^2dx\,dy$ の値を求めよ.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{13x-7y}}\,dx\,dy$ の値を求めよ.

(神戸大 2022) (m20223804)

0.413 n を正整数とする．積分

$$\iint_A (x+y)^2(x-y)^ndxdy\ ,\qquad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -\frac{1}{2}\leq y\leq x\leq\frac{1}{2}\right\}$$

を求めよ.

(神戸大 2022) (m20223808)

0.414 (1) $D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\leq 2,\ \ y\geq x,\ \ y\geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.

(2) $D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\ xy\geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\cos(ax^2+ay^2)dxdy$ を求めよ．ただし，a は実数である.

(3) D は $\boldsymbol{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y=x$ について線対称であるとする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2-y^2}{1+x^4+y^4}dxdy$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233804)

0.415 n を正の整数とする．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 D_n を

$$D_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n \;\middle|\; x_1\geq 0,\cdots,x_n\geq 0,\ x_1+\cdots+x_n\leq 1\right\}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) 定積分

$$\iint_{D_2} x_1x_2\,dx_1dx_2$$

を求めよ．

(2) 定積分

$$\iiint_{D_3}\left(\sum_{1\leq i<j\leq 3}x_ix_j\right)dx_1dx_2dx_3$$

を求めよ．

(神戸大 2024)　　(m20243802)

0.416 次の積分を計算せよ．ただし，a は定数で，$a>0$ である．

$$\iint_D x^2y\,dxdy \qquad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2, x\geq 0, y\geq 0\}$$

(鳥取大 1997)　　(m19973906)

0.417 次の重積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_K y\,dxdy\,,\quad K:0\leq y-x\leq 1,\ 0\leq x+y\leq 1$$

(鳥取大 2000)　　(m20003905)

0.418 $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$ の 3 つの直線に囲まれた領域で次の積分を計算しなさい．

$$\iint\left(x^2-xy\right)dxdy$$

(鳥取大 2004)　　(m20043903)

0.419 次の計算をせよ．

$$\iint_D(1-x^2-y^2)dxdy \quad \left(\text{ただし } D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}\right)$$

(鳥取大 2005)　　(m20053903)

0.420 $D=\left\{(x,y)\;\middle|\;\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1 \quad (a,b>0)\right\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ の値を求めよ．

(鳥取大 2007)　　(m20073906)

0.421 次の各積分を求めよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x|\leqq y\leqq 1}\sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$

(鳥取大 2009)　　(m20093913)

0.422 (1) 実数 t に対して，　$t=\tan\theta$　かつ　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta=\arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2) 不定積分　$\displaystyle\int\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n dx$　を $x=\sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は　$\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$　とする．

(3) α と R を実数とし，$R\geqq 1$ と仮定する．　領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqq x^2+y^2\leqq R^2\}$ における重積分　$\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$　の値を求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084101)

0.423 (1) 曲線 $y=\cosh x$ $(0\leqq x\leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.424 $f(x,y)=(x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$　を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094105)

0.425 以下の問いに答えよ．

(1) 次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める．

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}+\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ．ただし．積分領域 E を次で定める．

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.426 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^\ell}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ.

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ.

(3) $\ell = 1$ のとき, 極限

$$J = \lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy$$

を考える. 変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により, J は

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ. ここで, $\varphi(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ である.

(4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し, その値を求めよ.
その際, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は収束し, その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い.

(広島大 2014) (m20144110)

0.427 領域 $S = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ について以下の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_S (x+y)^2 dxdy$$

(広島大 2024) (m20244103)

0.428 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\,dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\right\}$$

(広島大 2026) (m20264102)

0.429 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ y \geqq x,\ y \geqq -x\}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) xy 座標平面上に D を図示せよ.

(2) 極座標変換により, D は D' にうつされる. D' を極座標を用いて表せ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2001) (m20014203)

0.430 xy 平面上の領域 $D = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0, x^2+y^2 \leqq 1\}$ に対し, 重積分
$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2002) (m20024204)

0.431 (1) 次の定積分が収束するかどうかを判定し, 収束する場合はその値を求めよ.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\ \alpha は正の定数とする)$$

(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4,\ x+y\geq 2\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x dxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2005)　　(m20054201)

0.432 2 重積分 . $S=\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ を求めることによって,

$I=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$　　を求めたい. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $S=I^2$ を示せ.

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変数変換して S を求めよ. また, I を求めよ.

(広島市立大 2008)　　(m20084201)

0.433 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を用いて, 2 重積分

$$S=\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\,|\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\right\}$$

の値を求めよ.

(広島市立大 2010)　　(m20104203)

0.434 3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ.

(1) 点 $(x,y,0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする. ただし, $x^2+y^2\leq 9$ である. 線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x,y,z) と表す. このとき, z を x,y の関数で表せ.

(2) 問 (1) で求めた関数を $f(x,y)$ とおく. 三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は,

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

と書くことができる. ただし, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 9\}$ である. この 2 重積分を計算することにより, V の値を求めよ.

(広島市立大 2011)　　(m20114203)

0.435 2 変数関数 $f(x,y)=\sin(x+2y)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) f の勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めよ.

また, 勾配ベクトルの具体的な値を $(0,0)$, $(0,\pi/4)$, $(0,\pi/2)$ において求めよ.

(2) 座標平面上の 4 点 $(0,0)$, $(0,\pi/2)$, $(\pi,0)$, $(\pi,-\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D とする（図 1）. 2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ の値を求めよ.

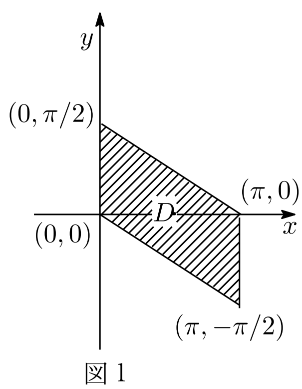


図 1

(広島市立大 2012)　　(m20124204)

0.436 $D = \left\{ (x,y) \in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 1\,,\ x \leq \sqrt{3}y \right\}$ とおく.
変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて,

$$\iint_D xy^2 dxdy$$

を求めよ.

(広島市立大 2013) (m20134202)

0.437 $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq xy \leq 2x\}$ とするとき,次の問に答えよ.

(1) D を xy 平面に図示せよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D ye^{xy}\, dxdy$ の値を求めよ.

(徳島大 2000) (m20004402)

0.438 (1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ において連続として

$$\iint_{D_a} f(x+y)dxdy = \int_0^a xf(x)dx, \quad D_a = \{(x,y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq a\}$$ を示せ.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{D_1} e^{-(x+y)^2} dxdy, \quad D_1 = \{(x,y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$$

(徳島大 2001) (m20014402)

0.439 $D = \{(x,y)\ :\ y \geqq\ x^2\,,\ y \leqq\ x+2\}$ とするとき,次の問いに答えよ.

(1) D を xy 平面に図示せよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ の値を求めよ.

(徳島大 2003) (m20034402)

0.440 原点を中心とする半径 $a > 0$ の閉円板を $D(a) = \{(x,y) \in R^2\ ;\ x^2+y^2 \leqq\ a^2\}$ とする.

(1) 2 重積分 $I(a) = \displaystyle\iint_{D(a)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ.

(2) 平面の全体における広義積分 $I = \displaystyle\iint_{R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ.

(徳島大 2004) (m20044402)

0.441 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^2} dx \right) dy$ について, 次の問に答えよ.

(1) 2 重積分を用いると $I = \displaystyle\iint_D y^2 e^{x^2} dxdy$ と書ける. このときの積分領域 D を図示せよ.

(2) I を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054403)

0.442 平面上の図形 $D = \{(x,y)\ :\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1,\ -2 \leqq\ y \leqq\ 2\}$, $S = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 4\}$ に対して,次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\iint_D dxdy$ と $\displaystyle\iint_S dxdy$ を求めよ. (2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ. (3) $\displaystyle\iint_S xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2007) (m20074403)

0.443 $D = \{(x,y)\ :\ y \geqq\ x,\ x \geqq\ 0,\ y \leqq\ 2\}$ に対して,二重積分 $I = \displaystyle\iint_D y^2 e^{-y^4}\, dxdy$ を考える.

(1) I を累次積分で表せ.

(2) (1) の累次積分の積分順序を変更せよ.

(3) I の値を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084403)

0.444 (1) $f(x,y) = x + y + \sin(x^2+y^2)$ に対して偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $a > 0$ に対して $D = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 \leq a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_y(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(徳島大 2009) (m20094403)

0.445 $0 < a < 1,\ D_a = \left\{(x,y)\ ;\ a^2 \leqq x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする.

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする. 行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ.

(2) $I(a) = \displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010) (m20104404)

0.446 $D = \{(x,y)\,;\,1 \leqq x+y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする. 二重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $u = x - y,\ v = x + y$ とおく. x, y を $u,\ v$ で表せ.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする. D' を図示せよ.

(4) I を求めよ.

(徳島大 2011) (m20114403)

0.447 $a > 0$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ を求めよ.

(2) $D = \left\{(x,y)\,;\,x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$ を求めよ.

(徳島大 2012) (m20124407)

0.448 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とし，xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,y)\ ;\ y \leqq x \leqq \dfrac{1}{2},\ a \leqq y \leqq \dfrac{1}{2}\right\}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) $I_a = \displaystyle\iint_D \cos\left(\pi(x-a)^2\right)\,dxdy$ を求めよ.

(3) (2) の I_a について，$\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - a\right)^{-2} I_a$ を求めよ.

(徳島大 2014) (m20144403)

0.449 $D = \{(x, y) \ : \ x \geqq \ 0, \ y \geqq \ 0, \ x+y \geqq \ 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u = x+y, \ v = \dfrac{y}{x+y}$ とおく．x, y を u, v の式で表せ．また，行列式 $J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 v \sin(\pi v) dv$ を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{y}{x+y} e^{-(x+y)} \sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I = \displaystyle\iint_D f(x, y) dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f\bigl(x(u, v), \ y(u, v)\bigr) |J(u, v)| du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.450 xy 平面上の領域を $D = \left\{(x, \ y) \ ; \ x^2 + y^2 \leqq 2x, \ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta \ (r \geqq 0, \ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 $\alpha, \ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r, \ \theta) \ ; \ \alpha \leqq \theta \leqq \beta, \ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．$\alpha, \ \beta, \ f(\theta)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184403)

0.451 (1) $D = \{(x, y) \mid y \leq 2x, \ x \leq 2y, \ x+y \leq 3\}$ とする，D を図示せよ．

(2) 次の 2 重積分の値を求めよ．　$\displaystyle\iint_D y \, dxdy$

(高知大 2008)　　(m20084502)

0.452 R^3 で，球 $S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leqq \ 5^2$ と円柱 $C \ : \ x^2 + z^2 \leqq \ 4^2$，$-5 \leqq \ y \leqq \ 5$ を考える．S と C の共通部分を V とするとき，3 重積分 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ は何を表すかを述べよ．また，この値を求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094502)

0.453 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する．

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x \, , \ x \leq 2y \, , \ x+y \leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x \, dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ．

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u = \varphi(x, y) = \frac{2x-y}{3} \, , \qquad v = \psi(x, y) = \frac{-x+2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x, y) = (\varphi(x, y), \ \psi(x, y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ．

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u,v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 2010) (m20104502)

0.454 $D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 < x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$ とし, $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}$ とする.
このとき, 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) D の内部から近づけた場合の次の極限を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

(3) 次の広義積分を求めよ.

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy$$

(高知大 2024) (m20244502)

0.455 $D = \{(x,y); y^2 \leqq x \leqq y, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2000) (m20004604)

0.456 $D = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 \leqq \pi^2\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

(愛媛大 2004) (m20044606)

0.457 次の積分を計算せよ. $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy \qquad D: x^2+y^2 \geqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x+2,\ 0 \leqq x \leqq 1$

(愛媛大 2004) (m20044607)

0.458 (1) 関数 $f(x,y) = x - x^3 - 2xy^2$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x,y) : 0 \leqq x, 0 \leqq y, 2 \leqq x^2+y^2 \leqq 3\}$ のとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D x^2 y dxdy$$

(愛媛大 2005) (m20054603)

0.459 $D = \{(x,y)\,; 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

(愛媛大 2006) (m20064604)

0.460 a を正の定数として, $D = \{(x,y)\ :\ -a \leqq x \leqq a,\ -a \leqq y \leqq a\}$ とするとき, 次の重積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D e^{|x-y|}dxdy$

(愛媛大 2007) (m20074604)

0.461 (1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の φ, ψ に対して $J(u,v)$ を求めよ．

(a) $\varphi(u,v) = e^u \cos v$,　$\psi(u,v) = e^u \sin v$

(b) $\varphi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$,　$\psi(u,v) = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D = \{(x,y)\ ;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008)　　(m20084610)

0.462 (1) 関数 $f(x,y) = x^4+y^4-(x-y)^2$ の極値を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid -\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\quad 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\sin(xy)\,dxdy$$

(愛媛大 2009)　　(m20094603)

0.463 以下の問に答えよ．

(1) 次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2y}{\pi}}^1 \cos\frac{y}{x}dx\right)dy$$

(2) $D = \{(x,y)\ :\ x,y \geq 0,\ 0 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114605)

0.464 $D = \{(x,y)\,;\,0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\,dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114610)

0.465 $D = \left\{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D xydxdy$$

(愛媛大 2015)　　(m20154604)

0.466 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq 2y \leqq 2\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \log(1+y^2)dxdy$$

(愛媛大 2017)　　(m20174604)

0.467 $D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right\}$ とする．

(1) D を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy$$

(愛媛大 2018)　　(m20184604)

0.468 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2021)　　(m20214604)

0.469 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x \geqq 1,\ y \geqq 2,\ xy \leqq 4\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xe^{xy}dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2022)　　(m20224609)

0.470 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x,\ 2y+x \leqq 6\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y-10)^2}\,dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2023)　　(m20234605)

0.471 (i) $f(x,y) = x^2+4xy+8y^4$ の極値を求めよ.

(ii) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\,\}$ とする.

(a) D を図示せよ.

(b) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2+1}\,dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2024)　　(m20244603)

0.472 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 1\ ,\ \ 0 \leq x-y \leq 1\}$ を座標平面に図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dx\,dy$ の値を計算せよ.

(九州大 1997)　　(m19974703)

0.473 重積分 $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy$ の値を求めよ.

ただし, $D = \{\,(x,y) \mid 0 \leq y-x \leq y+x < +\infty\,\}$ である.

(九州大 1998)　　(m19984705)

0.474 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad (0 \leq \theta \leq \pi\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,\ r \geq 0)$ とする.

(1) ヤコビヤンが $r^2\sin\theta$ になることを示せ.

(2) $D\ :\ \{x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \qquad x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\ ,\ z \geqq 0\ \}$

D は半径 R の球の $\dfrac{1}{8}$ である．このときの

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

を求めよ．（九州大 1999） (m19994703)

0.475 次の積分の計算をしなさい．

$$\iint_D (x^2+y^2)^{1/4}dxdy, \quad \text{ただし，} D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leq 4\}.$$

（九州大 2001） (m20014702)

0.476 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -x-1\leq y\leq -x+1,\ x-1\leq y\leq x+1\right\}$ とおく．

(1) 1 次変換 $u=x+y\,,\ v=x-y$ によって D が移される uv平面上の集合を図示せよ ．

(2) (1) の変数変換において，ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ．

(3) 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}dxdy$$

を求めよ．

(九州大 2012) (m20124710)

0.477 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq\ y$$

(九州大 2015) (m20154704)

0.478 2 次元実平面上の閉区間 $D,\ D_+$ を

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2-4\leqq y^2\leqq x^2-1 \ \text{かつ}\ 4\leqq x^2+y^2\leqq 9\right\}$

$D_+=D\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ |\ x\geqq 0\ \text{かつ}\ y\geqq 0\right\}$

とするとき，次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_+} xydxdy$ (2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(九州大 2019) (m20194706)

0.479 $x>0,\ y>0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)\ , \qquad g(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t\to+0} t\log t=0$$

(3) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\}$ における次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{f(x, y)}{g(x, y)} dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.480　領域 $R = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2x\}$ に対する積分　$I = \iint_R (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2-3xy}\,dxdy$　を求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204704)

0.481　以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

(1) 次の広義積分は収束することを示せ．

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

(2) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 1\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

(3) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

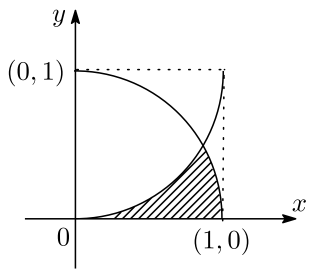
(九州大 2021)　　(m20214710)

0.482　第 1 象限において，円 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$ および x 軸で囲まれる部分を A とする（図の斜線部）．

(1) 2 つの円の第 1 象限内の交点を求めよ．

(2) 不定積分　$\int x \cdot e^{2x} dx$　を求めよ．

(3) 重積分　$\iint_A x^3 \cdot e^{x^2+y^2} dxdy$　を求めよ．



(九州大 2022)　　(m20224707)

0.483　次の 2 重積分を求めよ．　$I = \iint_D y\,dxdy$　　$D = \{(x, y)\ :\ y^2 \leq x \leq y + 2\}$

(佐賀大 2003)　　(m20034919)

0.484　重積分　$\iint_{\{-1 \leq x+y \leq 1\ ,\ -1 \leq x-y \leq 1\}} (x^2 - y^2)e^{-(x+y)} dxdy$　を計算せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034920)

0.485　以下の重積分を計算せよ．

$$\iint_D 3x dxdy \qquad D = \{\ x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\}$$

(佐賀大 2004)　　(m20044919)

0.486　$\iint_D (x + y)e^{x-y} dxdy\ ,\qquad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1\ ,\ 0 \leq x - y \leq 1\}$
を計算せよ．

(佐賀大 2004)　　(m20044920)

0.487 次の 2 重積分を求めよ.

$$I = \iint_D (px^2 + qy^2)dxdy \qquad D = \{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad (p, q \text{ は定数})$$

(佐賀大 2004) (m20044921)

0.488 次の定積分を求めよ.

$$\iint_D dxdy\, x^2 y \qquad D = \{(x, y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x + y \leq 1\}$$

(佐賀大 2005) (m20054911)

0.489 重積分 $\displaystyle\iint_D y\, dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y + 2\}$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054916)

0.490 $f(x), g(x)$ は無限回微分可能な実数値関数で，$g(x) \geq 0$ とする．
$D = \{(x, y)\,;\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$ とするとき，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{d\, g(x)}{dx}\, \frac{d^2 f(y)}{dy^2}\, dxdy$$

ただし，$f'(0) = 0,\ f(g(1)) = 3,\ f(g(0)) = 0$ である．

(佐賀大 2006) (m20064903)

0.491 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2)\, dxdy \qquad (\ D\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\ )$

(佐賀大 2006) (m20064910)

0.492 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x - y}}\, dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y < x \leq 1\}$ を計算せよ.

(佐賀大 2006) (m20064918)

0.493 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2}\, dxdy\ , \quad D\ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ を計算せよ.

(佐賀大 2006) (m20064940)

0.494 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x \log x\, dx$ （ 不定積分．積分定数を C とせよ．）

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\, dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2 y\, dxdy$ $\Big($ 但し，$D = \big\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq \sqrt{x}\ \big\}\Big)$

(佐賀大 2007) (m20074907)

0.495 次の積分を求めよ.

$$\iint_D x\, dxdy \qquad (D : x^2 + y^2 \leq 4,\ x + y \geq 2)$$

(佐賀大 2010) (m20104904)

0.496 図 1 に示す三角形の面密度が $\rho(x, y) = \dfrac{y}{x + 1}$ で与えられるとき，この三角形の質量 M と重心の座標 $(g_x,\, g_y)$ を求めよ．ただし，重心の座標は，三角形の領域を S としたとき，

$$g_x = \frac{\displaystyle\iint_S x\rho(x, y)\, dx}{M}\ , \quad g_y = \frac{\displaystyle\iint_S y\rho(x, y)\, dx}{M}$$ で与えられる.

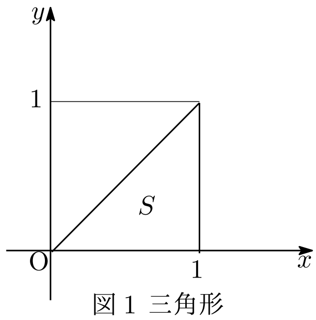


図 1 三角形

(佐賀大 2011)　　(m20114913)

0.497　$D = \{(x, y)\,|\,0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq x\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D \log(x+y+1)dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2012)　　(m20124903)

0.498　次の 2 重積分を変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_{1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^3}$$

(佐賀大 2013)　　(m20134906)

0.499　$D = \Big\{(x, y)\ |\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\Big\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y(e^x-1)}{x}dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144915)

0.500　次の 2 重積分を 2 つの方法を使って計算せよ．

$$\iint_D ydxdy\,, \qquad D = \{x^2+y^2 \leq a^2,\ y \geq o \quad (a > 0)\}$$

(1)　逐次積分（累次積分）を使って計算せよ．

(2)　2 次元極座標に変換して計算せよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154914)

0.501　次の積分について，問いに答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ を求めよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x dx$ を求めよ．

(3)　$D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164903)

0.502　次の二重積分について以下の問いに答えよ．

ただし，$D = \Big\{(x, y)\ \Big|\ 1 \leqq\ x-2y \leqq\ 3,\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 1\Big\}$ とする．

$$\iint_D (x-2y)e^{x+y}dxdy$$

(1)　積分領域 D を図示せよ．　　　(2)　二重積分を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164915)

0.503　(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$ を求めよ．　　　(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ を求めよ．

(3) $D=\{(x,y)\ :\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x^2\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164927)

0.504　次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{2+x^2+y^2}dxdy \quad （ただし，D は 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4 で表される領域とする．）$$

(佐賀大 2017)　　(m20174902)

0.505　xy 平面上の集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R>2$ を満たすとする．

(1) $\displaystyle\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい．

(2) 集合 D を $D=\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $\displaystyle I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$ を求めなさい．

(佐賀大 2018)　　(m20184903)

0.506　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D x^2dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1,\ y\geq 0\right\}$$

(佐賀大 2021)　　(m20214902)

0.507　$D=\{(x,y)\mid 1\geq x+y,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214918)

0.508　重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\ \mid\ x^2+y^2\leq 4\}$ について　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ として計算せよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214926)

0.509　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D\left(x+\frac{2}{y}\right)dxdy\qquad (D:1\leq x\leq 4,\ 1\leq y\leq e^2)$$

(佐賀大 2022)　　(m20224908)

0.510　(1) $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 1\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D\frac{2x}{1+y^4}\,dxdy$ を求めよ．

(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D(x^2+y^2+1)\,dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2022)　　(m20224917)

0.511　重積分 $\displaystyle\iint_D\sin 2x\,dxdy\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x+y\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq x-y\leq\frac{\pi}{2}\right\}$ を求めなさい．

答えだけでなく途中経過 も記載すること．

(佐賀大 2022)　　(m20224929)

0.512　(1) $D=\{(x,y)\ \mid\ x+y\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D(x^2-2y)\,dxdy$ を求めよ．

(2) $D=\{(x,y)\ \mid\ 0\leq x+y\leq\pi,\ 0\leq x-y\leq\pi\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D(x+y)\sin(x-y)\,dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2023)　　(m20234904)

0.513 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\le x\le e^2,\ 1\le y\le e\right\}$$

(佐賀大 2023) (m20234918)

0.514 $I=\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\le x\right\}$ について答えなさい.

(1) 集合 D を図示しなさい.

(2) 重積分 I を求めなさい.

(佐賀大 2023) (m20234927)

0.515 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\le 2,\ y\ge 0\right\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2024) (m20244916)

0.516 次の積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\ dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$

(c) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\ dxdy \qquad (D\ :\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 1)$

(佐賀大 2024) (m20244930)

0.517 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$ を求めよ.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ を計算せよ.

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$, $\left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき, 曲線の長さ L を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075004)

0.518 次の値を求めよ.

(1) $I(R)=\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ 注:問 (1) の結果を引用してもよい.

(長崎大 2008) (m20085005)

0.519 $D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\leqq\ 1\}$ とするとき, 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ を求めよ.

(長崎大 2008) (m20085009)

0.520 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ.

(2) $D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\,,\ x^2\le y\le 1\right\}$ とするとき, 領域 D を図示し, 2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\,dxdy$ を求めよ.

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(長崎大 2009)　　(m20095008)

0.521 (1) 不定積分 $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi\,,\ a > 0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.522 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{3x+2y}\,dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$ を求めよ．

(長崎大 2010)　　(m20105014)

0.523 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D xy(x-y)dxdy\ ,\quad D\,:\,0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$$

(長崎大 2011)　　(m20115011)

0.524 次の二重積分を求めなさい．

$$\iint_D xydxdy \qquad \text{ただし，}\quad D\,:\,x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ 4$$

(大分大 2005)　　(m20055104)

0.525 $\displaystyle\iint_D \frac{1+x-y}{1+x+y}dxdy$ の値を求めよ．$D = \{(x,y)\,|\,0 \leqq\ x+y \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 1\}$

（熊本大 2001）　　(m20015204)

0.526 xy 平面上の集合 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+\dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-\dfrac{y^2}{4}}}dxdy$ を求めよ．

(熊本大 2006)　　(m20065203)

0.527 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(熊本大 2007)　　(m20075202)

0.528 次の重積分の値を求めるために，以下の小問 (1) と (2) について答えなさい．

$$\iint_{4\leq x^2+y^2\leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x,y を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のように変数 $r,\ \theta$ を用いて変数変換をする，この変数変換のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(2) 変数 $r,\ \theta$ とヤコビアン J を用いて，式 ① の重積分の値を求めなさい．

(熊本大 2014)　　(m20145203)

0.529 以下の積分を計算せよ．ただし，領域 D は図 4 に示す通りである．

$$I = \iint_D xydxdy$$

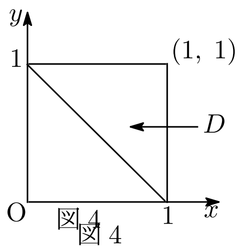


図 4

(熊本大 2018)　　(m20185202)

0.530 次の積分について，以下の問に答えなさい．

$$I = \iiint_D \frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\,dxdydz$$

$$D\ :\ a \leq x+y+z \leq b,\ 0 \leq x, y, z \quad (0 < a < b)$$

(1) $t = x+y+z,\ u = y+z,\ z = z$ と変換した場合のヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,z)} \qquad \left(= \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)} \right)$$

を求めなさい．

(2) D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい．

(3) I を $a,\ b$ を用いて求めなさい．

(熊本大 2021)　　(m20215202)

0.531 重積分 $I = \iint_D \dfrac{x}{(x^2+y)^2}dxdy$ に対して，次の各問に答えよ．
ただし，$D = \{(x,y) | \max(1, x^2) \leqq\ y \leqq\ 4, x \geqq\ 0\}$ とする．

(1) D を図示せよ．　　　　(2) I の値を求めよ．

(宮崎大 2001)　　(m20015303)

0.532 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ ，　$D\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 2$　の値を，次の指示に従って求めよ．

(1) 積分領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) (x,y) を極座標 (r,θ) で表し，積分領域 D に対する (r,θ) の範囲を求めよ．

(3) ヤコビアン $\left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right|$ を求めよ．

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分の値を求めよ．

(宮崎大 2004)　　(m20045303)

0.533 以下の各問に答えよ．

(1) 平面内の集合 D を

$$D = \left\{ (x,y)\ \middle|\ 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

と定義する．集合 D を xy 座標平面上に図示せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2) (1) の集合 D 上で次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xydxdy$$

(宮崎大 2005)　　(m20055304)

0.534　平面内の集合 D を　$D = \{(x, y) \mid x - 1 \leqq y \leqq x + 1,\ -1 \leqq x \leqq 1\}$　と定義する.

(1)　D を xy 座標平面上に図示せよ.　　(2) 次の重積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$

(宮崎大 2006)　　(m20065304)

0.535　(1)　平面内の集合 D を,　$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y^2 \leqq x \leqq y\}$ と定義する.
集合 D を座標平面上に図示せよ.

(2)　(1) の集合 D 上での次の重積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$

(宮崎大 2007)　　(m20075304)

0.536　(1)　平面内の領域　$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$
を xy 平面上に図示せよ. ただし, a, b は正の定数とする.

(2)　$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$　$(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変換したとき, 領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し, またそれを図示せよ.

(3)　ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(4)　(3) で求めたヤコビアンを用いて, 重積分 $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2008)　　(m20085303)

0.537　重積分

$$I = \iint_D (1 + xy) dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid y^2 \leqq x \leqq 2y\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1)　集合 D を xy 座標平面上に図示せよ.

(2)　重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2009)　　(m20095304)

0.538　xy 平面上で $x = 2,\ y = 1,\ y = x^2$ によって囲まれた領域を D とするとき, 次の各問に答えよ.

(1)　領域 D を xy 座標平面上に図示せよ.

(2)　重積分 $I = \displaystyle\iint_D (x + y)\, dxdy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105304)

0.539　重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\, dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

について, 次の各問いに答えよ.

(1)　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2)　重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.540 次の 2 重積分 I の値を求めよ.

$$I=\iint_D (x^3+y^3)dxdy\,,\quad \text{ただし, } D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\leqq\ x\leqq\ 1\,,\ -1\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$$

(宮崎大 2012)　　(m20125302)

0.541 重積分

$$I=\iint_D (x+y^2)dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geqq\ x^2,\ x-y\geqq\ 0\right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2013)　　(m20135303)

0.542 重積分

$$I=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ y\geqq\ x\right\}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2014)　　(m20145302)

0.543 重積分

$$I=\iint_D xy\,dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\,|\,x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+\frac{y^2}{4}\leqq\ 1\right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 値域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2015)　　(m20155304)

0.544 重積分

$$I=\iint_D \sin\frac{2x+y}{9}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ y\leqq\ x,\ x+\frac{y}{2}\leqq\ 3\pi\right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 等式 $I=\displaystyle\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}}\left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}}\sin\frac{2x+y}{9}dx\right)dy$ の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ.

(3) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2016)　　(m20165305)

0.545 重積分

$$I=\iint_D xdxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{4}x^2\leqq y\leqq\frac{1}{2}x\right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2017)　　(m20175305)

0.546 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める.

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す.

また，球 B の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z = f(x,\ y)$ とする.

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える.

このとき，次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ.

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ.

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，I は

$$I = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} \left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \boxed{\quad\text{オ}\quad}\, d\theta \right) dr$$

と書き直せる．空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数または式を答えよ.

(4) I を計算することによって，$V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ.

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.547 重積分

$$I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を，xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2020)　　(m20205304)

0.548 2 変数関数 $f(x,y) = \sqrt{x}\,y^2$ について，次の各問に答えよ.

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ をすべて求めよ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2x\right\}$ の値を求めよ.

(宮崎大 2021)　　(m20215303)

0.549 重積分 $I = \displaystyle\iint_D e^{x^2} dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\right\}$ の値を求めよ.

(宮崎大 2022)　　(m20225303)

0.550 重積分 $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 2\right\}$ の値を求めよ.

(宮崎大 2023)　　(m20235303)

0.551 重積分 $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy,\ D = \{(x,y) \mid y \leqq 2x,\ 2y \geqq x,\ x+y \leqq 3$ について考える.

(a) 領域 D を座標平面に図示せよ.

(b) 累次積分 $J = \displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} (x+y)\,dy \right\} dx$ の値を求めよ.

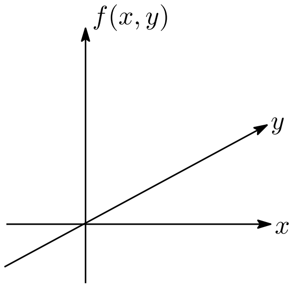
(c) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2024)　　　(m20245303)

0.552　以下の重積分 I について，次の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D = \left\{x + y \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\right\},\ \ f(x,y) = x$$

(1)　この重積分 I に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい.



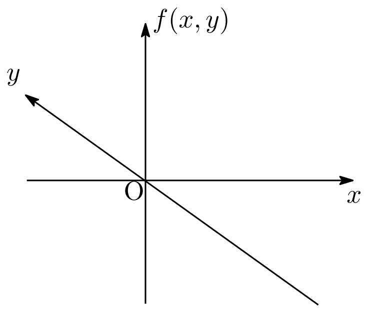
(2)　この重積分 I の値を積分計算により求めなさい.

(鹿児島大 2013)　　　(m20135412)

0.553　以下の重積分 I について，次の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy\ ,\quad D = \left\{x^2 + y^2 \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0\right\},\quad f(x,y) = x$$

(1)　この重積分 I に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい.



(2)　この重積分 I の値を積分計算により求めなさい.

(鹿児島大 2014)　　　(m20145417)

0.554　次の積分を計算せよ.

$$\iint_D (-x + 2y)(2x + 2y)\ dxdy\ ,\qquad D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 1 \leq x \leq 2,\ 2 \leq y \leq 4\right\}$$

(鹿児島大 2021)　　　(m20215416)

0.555　次の積分の値を求めなさい.

$$\iint_D xydxdy,\qquad\qquad D = \{0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$$

(鹿児島大 2025)　　　(m20255424)

0.556　直交座標系の任意の点 $P(x,y,z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える.

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (x,y,z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ.

(1)　閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}| = 1$) を求めよ.

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV = \iiint \bigtriangledown\cdot\boldsymbol{A}\,dV$ を求めよ.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165508)

0.557 $D\ :\ 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq\ 1$ により定義される領域を D として, 次の重積分を計算せよ.

$$I = \iint_D \left(2x + 3y^2\right) dxdy$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165515)

0.558 積分せよ.

$$\iint_D 2ydxdy \quad , \quad D\ :\ 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x^2$$

(室蘭工業大 2017)　　(m20175512)

0.559 次の積分の値を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{1-3y^2}{x^2} dydx \qquad D = \{1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185506)

0.560 以下の積分の値を求めなさい. ただし, $\mathbb{R}$ はすべての実数の集合とする.

$$\iint_A xy\,dx\,dy, \qquad \text{ただし, } A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 2\right\}$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185514)

0.561 変数変換を用いて次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x^2y^2dxdy \qquad D = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(岡山県立大 2007)　　(m20075605)

0.562 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D e^{x-y}dxdy\ , \quad D = \{(x,y)\ :\ 0 \leqq\ x \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\}$$

(岡山県立大 2008)　　(m20085604)

0.563 以下の設問に答えよ. なお, <u>解答には導出過程を含むこと</u>.

領域 $D : |x-2y| \leq 1\,,\ |x+3y| \leq 1$ のとき, 次の手順にしたがって, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy$ を求めよ.

(1) $x - 2y = u\,,\ x + 3y = v$ とし, $x,\ y$ を, u と v を用いて表せ.

(2) $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv$ の関係を用いて, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy$ を求めよ.

(香川大 2005)　　(m20055701)

0.564 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D xydxdy \qquad D\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq a^2$$

(香川大 2017) (m20175703)

0.565 以下の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x+3y+1)dxdy \quad D=\{(x,y)\mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x\}$$

(香川大 2018) (m20185703)

0.566 次の 2 重積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}dxdy \quad D : x^2+y^2 \leqq 4x,\ y \geqq 0$

(香川大 2020) (m20205703)

0.567 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (x+y)\,dxdy \qquad D\ :\ x+y-2 \geqq 0,\ 1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 4$$

(香川大 2021) (m20215704)

0.568 次の問に答えよ．

(1) 原点 O を中心とし, 半径 a の円の上半分を D とする. 次の 2 重積分を求めよ $(a>0)$.

$$I=\iint_D y\,dxdy$$

(2) 平面 $z=y$ と xy 平面の間で, xy 平面上の半円 $x^2+y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の上にある立体の体積 V を求めよ $(a>0)$.

(島根大 2005) (m20055813)

0.569 $u=3x+y,\ v=x-3y$ と変数変換することにより，２重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy\,,\quad D=\{(x,y)\ :\ 0 \leq 3x+y \leq 1,\ -1 \leq x-3y \leq 0\}$ を求めよ．

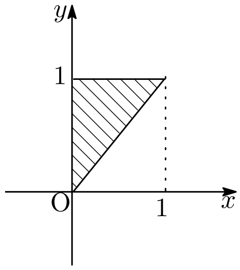
(島根大 2007) (m20075807)

0.570 次の重積分を求めよ． a は正定数とする． $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ ただし D は $(x,y)-$ 平面内にある円 $(x-a)^2+y^2 \leq a^2$ の上半分，すなわち $y>0$ を満たす部分である．

(島根大 2008) (m20085804)

0.571 (1) $\displaystyle\int_a^1 xe^{-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(2) 図 1 の斜線部で示すような, xy 平面上の領域を D とする. 領域 D における積分 $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$ を計算せよ．



(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy \right\} dx$ を計算せよ．

(島根大 2010)　　(m20105813)

0.572 m, n は自然数とし，

$$I(m,n) = \iint_D (x+y)^{m-1} x^{n-1} y\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y) : x>0,\ y>0,\ x+y<1\right\}$$

を定める．次の問いに答えよ．

(1) 次の変数変換を行うことによって，$I(m,n)$ を u と v についての重積分に書き直せ．

$$u = x+y\ , \qquad v = \frac{y}{x}$$

(2) 積分値 $I(m,n)$ を求めよ．

(島根大 2013)　　(m20135803)

0.573 次の問いに答えよ．

(1) $0<r_1<r_2$ とし，$D_1 = \left\{(x,y) : {r_1}^2 \leqq x^2+y^2 \leqq {r_2}^2\right\}$ と定める．このとき，積分 $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ の値を求めよ．

(2) $0<r$ とし，$D_2 = \left\{(x,y) : 0 < x^2+y^2 \leqq r^2\right\}$ と定める．このとき，広義積分 $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ が収束する α の範囲を求めよ．

(島根大 2014)　　(m20145805)

0.574 $D = \left\{(x,y) : 5x^2-6xy+5y^2 \leq 4,\ y \geq x\right\}$ とする．

(1) 変数変換 $x = u - \dfrac{v}{2},\ y = u + \dfrac{v}{2}$ を考える．この変換により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \exp\left(\frac{5x^2-6xy+5y^2}{4}\right) dxdy$ の値を求めよ．ただし $\exp(x) = e^x$ である．

(島根大 2015)　　(m20155807)

0.575 (1) $R>0$ とする．$\Omega(R) = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dy \right) dx$ を求めよ．

(3) α を定数とし，$(x,y) \neq (0,0)$ に対して $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.576 (1) $D = \{(x,y) : 0<x,\ 0<y,\ x+y<1\}$ とする．変数変換 $x = u - uv,\ y = uv$ により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ．

(2) D は問 (1) と同じとする．重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$ を計算せよ．

(島根大 2017)　　(m20175807)

0.577 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq \pi\}$ とするとき，重積分

$$\iint_D (x - y)\cos(x^2 - y^2)dxdy$$

の値を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185808)

0.578 $g(x)$ は $0 < \alpha \leqq x \leqq \beta$ で連続であり，

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \alpha \leqq x + y \leqq \beta\}$$

とする．このとき，

$$\iint_D g(x + y)dxdy = \int_\alpha^\beta xg(x)dx$$

となることを証明せよ．

(島根大 2019)　　(m20195808)

0.579 $f(x, y) = \dfrac{4}{(2 + x^2 + y)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の偏導関数を求めよ．

(2) 点 $P(1, -1, 1)$ における，曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) $a > 0$ に対して，$D(a) = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ とおく．
2 重積分　$I(a) = \displaystyle\iint_{d(a)} f(x, y)\, dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a \to \infty} I(a)$ を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205807)

0.580 次の二重積分を計算せよ．$\displaystyle\iint_{\substack{x+y \leqq 1 \\ x, y \geqq 0}} (x^2 + y^2)\, dxdy$　　(首都大 2008)　　(m20085906)

0.581 ストークスの定理においては，閉曲線 C を境界にもつ曲面 S 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対して次式が成り立つ．ただし，S 上の正の向きの法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，閉曲線 C 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．また，右辺の線積分は C 上を反時計まわりの方向に積分する．

$$\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

ストークスの定理の特別な場合として 2 次元平面においてはグリーンの定理が成り立つ．xy 平面上に単純閉曲線 C で囲まれた領域 D の 2 つのスカラー場 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ に対して次式で表される．ただし，右辺の線積分の向きはストークスの定理と同様である．

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_C (fdx + gdy)$$

これらの定理を必要に応じて用い，以下の問いに答えよ．

(1) 次の線積分を求めよ．

$$\int_C \{(x^2 - 2xy)dx + (x^2 y + 3)dy\} \quad (D\ :\ 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y,\ \ y^2 \leq 8x)$$

(2) 曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ の $z \geq 0$ の部分を S とし，法線ベクトルは z 軸に沿って上向きにとる．x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表す．次のベクトル場

$$\boldsymbol{F} = (x^2 + y - 4)\boldsymbol{i} + 3xy^2\boldsymbol{j} + (2xz + z^2)\boldsymbol{k}$$

に対して

$$\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を求めよ．

(東京都立大 2024)　　(m20245903)

0.582　(1)　$x^2+y^2 \leqq 2x$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2)　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ の値を求めよ，

(滋賀県立大 2007)　　(m20076004)

0.583　原点を中心とする半径 R の球を V とする．このとき，$\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ の値を求めよ，

(滋賀県立大 2008)　　(m20086004)

0.584　原点を中心とする半径 R の円盤の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分を B とする．

このとき，$\displaystyle\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096004)

0.585　(1)　$x^2+y^2 \leqq 2$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2)　$\displaystyle\iint_D \sqrt{2-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(滋賀県立大 2011)　　(m20116004)

0.586　適当な変数変換を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy\ ,\quad \text{但し，} D : 0 \leqq x-y \leqq x+y \leqq 1$$

(滋賀県立大 2012)　　(m20126004)

0.587　不等式 $x^2+y^2 \leqq 2x$ で与えられる xy 平面の領域を D とする．

(1)　D を図示せよ．

(2)　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2014)　　(m20146004)

0.588　D を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$（$a$，$b$ は正の実数）で与えられる領域とするとき，$x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$ とおくことにより，$\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156004)

0.589　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2x\right\}$ とするとき，次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D x^2dxdy$$

(滋賀県立大 2022)　　(m20226002)

0.590　$D=\{(x,y)\mid y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき，次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D e^{x^2}dxdy$$

(滋賀県立大 2024)　　(m20246002)

0.591 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq \cos x,\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D (x-y)dxdy$$

(滋賀県立大 2025) (m20256002)

0.592 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}dxdy$, $D=\{(x,y) \mid 0 \leqq\ x \leqq \sqrt{y}\ ,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$, $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2007) (m20076406)

0.593 次の重積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, $D=\{(x,y) \mid x^2 \leqq\ y \leqq\ x+2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$, $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2008) (m20086405)

0.594 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x(x+y)\,dxdy$, $D=\{(x,y) \mid x-1 \leqq\ y \leqq\ 1-x,\ x \geqq\ 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy$, $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$

(東京海洋大 2009) (m20096405)

0.595 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, $D=\{(x,y) \mid x^2 \leqq\ y \leqq \sqrt{x}\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2+1}\,dxdy$, $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 1\ ,\ x \geqq\ 0\ ,\ y \geqq\ 0\}$

(東京海洋大 2010) (m20106405)

0.596 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$, $D=\{(x,y) \mid y^2 \leqq\ x \leqq\ y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy$, $D=\{(x,y) \mid 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4\}$

(東京海洋大 2011) (m20116405)

0.597 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |x| \leqq\ y \leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq\ 1\right\}$

(東京海洋大 2012) (m20126406)

0.598 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 2\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ の値を求めよ.

(2) 積分の順序を入れ替えることにより，重積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{x}^{1} y^2 e^{xy}dy\right)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2016)　　(m20166409)

0.599 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1 \leqq x \leqq 2,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq x\right\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D 2y\log x\ dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\mid 0 \leqq x+y \leqq 2,\ 0 \leqq x-y \leqq 1\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_E (x^2-y^2)\ dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216410)

0.600 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_E \log(x^2+y^2+9)dxdy,\qquad E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2 \leqq x^2+y^2 \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(東京海洋大 2022)　　(m20226405)

0.601 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 1\right\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{y^3+1}}\ dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ y \leqq x,\ 0 \leqq x\right\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_E xy\ dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2023)　　(m20236409)

0.602 (1) $D=\{(x,y)\mid\ x^2 \leqq y \leqq -2x\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D (1+2x+y)^3 dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\mid\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ -\pi \leqq x-y \leqq \pi\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_E (x-y)\sin(x^2-y^2)dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2024)　　(m20246406)

0.603 次の 2 重積分の値を求めなさい． $\displaystyle\iint_D -2xe^{1-y}dxdy\quad D=\{(x,y)\mid 0 \leqq\ x \leqq\ 1\ ,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1-x^2\}$

(和歌山大 2007)　　(m20076506)

0.604 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x}$ を求めなさい．

(2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{5^2}=3$ で表される曲面の，点 $(2,3,5)$ における法線の方程式を求めなさい．

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(和歌山大 2008)　　(m20086502)

0.605 (1) $f(x)=e^{x^2+1}$ のマクローリン展開を，4 次の項まで求めなさい．

(2) 曲線 $x^4+3x^2+2xy^2+4y^3-10=0$ の $(x,y)=(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい．

(3)　2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+x+1}\,dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\,,\ x\le y\le x+1\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096502)

0.606　次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\}$$

(和歌山大 2010)　　(m20106509)

0.607　2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x-1}\,dxdy\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq\ x\right\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2012)　　(m20126505)

0.608　次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D e^{x-y}dxdy\ ,\qquad D\ :\ \left\{0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le\frac{x}{2}\right\}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136504)

0.609　次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D (x+2y)e^y dxdy\ ,\qquad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\}$$

(和歌山大 2014)　　(m20146506)

0.610　次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D x\cos y\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,\ x\le y\le 2x\}$$

(和歌山大 2015)　　(m20156504)

0.611　次の 2 重積分の値を求めなさい.　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\le x\right\}$

(和歌山大 2016)　　(m20166503)

0.612　(1)　次の重積分を，極座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ によって，r と θ の積分に変数変換しなさい.

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$$

(2)　(1) の積分の値を求めなさい.

(和歌山大 2018)　　(m20186503)

0.613　座標平面上で直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2$ で囲まれる部分を D とする．次の I の値を求めなさい.

$$I=\iint_D (x+2y)\ dx\ dy$$

(和歌山大 20221)　　(m20216504)

0.614　平面の領域 D を $x=0,\ y=0,\ x+y=2$ で囲まれた部分とする．次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x+y)dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226504)

0.615 次の広義積分が収束するような実数 s の値の範囲を求めよ．

$$\iint_{x^2+y^2 \geqq 1} (x^2+y^2)^s \, dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226505)

0.616 xy 平面上で，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$ が表す領域を D とする．次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy \, dxdy$$

(和歌山大 2023)　　(m20236505)

0.617 次の (1)〜(5) に答えよ．ただし，

$$D = \left\{(x,y) \ \middle|\ 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

である．

(1) 極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

を求めよ．

(2) 重積分 $I_1 = \displaystyle\iint_D dxdy$ を求めよ．

(3) 重積分 $I_2 = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ を求めよ．

(4) 積分 $I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^{-r^2} r \, dr$ を求めよ．

(5) 重積分 $I_4 = \displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ を求めよ．

(和歌山大 2025)　　(m20256502)

0.618 関数 $f_n(x,y) = \sin\sqrt{x^n+y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ，

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x,0)}{\sqrt{x}}\, dx$ を求めよ．

(3) 自然数 m に対して $I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x,0))^m}{\sqrt{x}}\, dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ．また m は奇数として I_m を求めよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \ \middle|\ 0 \leq x^2+y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x,y)\, dxdy$ を求めよ．

(京都府立大 2008)　　(m20086702)