 作成責任者：軽井沢数学 IC 数学教育研究所 所長 碓氷長 (94 歳)

0.1 以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 5x}{x^2}$

(筑波大 2026) (m20261301)

0.2 以下の問いに答えよ.

(1) $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たす実数 $x,\ y$ の有界閉集合に関して，$f(x, y) = xy$ の最大値と最小値を求めよ.

(2) $f(x, y) = xy$ に関して (1) で求めた最大値をとる (x, y) のうち $x > 0$ となるものを $(x_0,\ y_0)$ とおく．曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ の $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を答えよ.

(筑波大 2026) (m20261302)

0.3 i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ.

(1) 複素平面上の 2 点 $2i$ と $-i$ からの距離が 2 ： 1 である点の集合が円となることを複素変数 z を用いて示せ．また，その円の中心と半径を求めよ.

(2) (1) で指定された z 平面上の円を複素関数 $w = 1/z$ により w 平面上に変換した像を図示せよ.

(筑波大 2026) (m20261303)

0.4 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について考える．ここで n は正の整数とする．$a_{n+1} = b_n$ として，以下の問いに答えよ.

(1) 上記漸化式を $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ と表す． ここで A は整数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & f \\ g & h \end{pmatrix}$ である．この行列 A の成分 $f,\ g,\ h$ の値を求めよ.

(2) 行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ およびこれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$ とし，$\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ それぞれの第 2 成分を 1 とすること.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) A^n を $n,\ P,\ P^{-1},\ \lambda_1,\ \lambda_2$ を用いて表せ.

(5) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ を A^n を用いて表し，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(6) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.

次に，漸化式 $a_{n+2} = sa_{n+1} + ta_n$ （ $s,\ t$ は実数 ），$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について考える．ここで n は正の整数とする．$a_{n+1} = b_n$ として，以下の問いに答えよ.

(7) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 B を実数の範囲で対角可能な $s,\ t$ の必要十分条件を求めよ.

(筑波大 2026) (m20261304)

0.5 4 次の実対称行列 A を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) 以下の $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ は行列 A の固有ベクトルである.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

各ベクトルに対応する固有値をそれぞれ答えよ.

(2) 直交行列を用いて行列 A を対角化せよ.

(筑波大 2026) (m20261305)

0.6 (1) n 次元実ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるとき, ベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ は一次独立であるか否かを示せ.

(2) 以下の $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_5$ のベクトルの中から, 1 次独立ベクトルの組を選ぶことを考える. 最も多くのベクトルを含む組を 1 つ示せ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2026) (m20261306)

0.7 円周率 π の近似値を求めることを考える.

(1) 関数 $f(x) = (1+x)^a$ のマクローリン展開を 2 次の多項式と剰余項の和の形式で示せ. ただし, a は定数である.

(2) (1) で求めた関係式を利用して関数 $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ のマクローリン展開を求め, さらに両辺を 0 から定数 b $(0 \leq b \leq 1)$ まで積分せよ. ただし, 剰余項の積分は $E(b)$ としてよい.

(3) (2) で求めた関係式に $b = \dfrac{1}{2}$ を代入し, $E(b)$ を無視することにより, 円周率 π の近似値を求めよ. なお, 解答は分数で表せ.

(筑波大 2026) (m20261307)

0.8 以下の関数 $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

(筑波大 2026) (m20261308)

0.9 定数 $\lambda > 0$ に対して, 以下の確率分布に従う確率変数 X を考える.

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

ただし, e は自然対数の底である.

(1) 以下の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$$

(2) 確率変数 X の期待値を求めよ.

(3) 確率変数 $X(X-1)$ の期待値を求めよ.

(4) 確率変数 X の分散を求めよ.

(筑波大 2026) (m20261309)

0.10 以下のデータは正規母集団から無作為に抽出された標本とする.

$$11,\ 19,\ 2,\ 16,\ 13,\ 6,\ 0,\ 10,\ 18,\ 5$$

必要に応じて付表を参照し，解答は四捨五入して小数点以下第 1 位まで求めること.

(1) 標本の平均 m と不偏分散 u^2 を求めよ.

(2) 母分散 $\sigma^2 = 50$ が既知のとき，母平均 μ の 95 %信頼区間を求めよ.

(3) 母分散が未知のとき，母平均 μ の 95 %信頼区間を求めよ.

(筑波大 2026) (m20261310)

0.11 関数

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$$

について，以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 次偏導関数および 2 次偏導関数を求めなさい.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値の有無を調べ，極値がある場合はそれを与える x, y と $f(x,y)$ の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 領域

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

における関数 $f(x,y)$ の重積分

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

を極座標変換を用いて求めなさい.

(筑波大 2026) (m20261311)

0.12 3 つの漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定まる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A の全ての固有値を求め，各固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めなさい.

(3) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とするとき，これを設問 (2) で求めた固有ベクトルの一次結合で表しなさい．

(4) 設問 (3) の結果を用いることにより，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ の一般項を求めなさい．

(筑波大 2026)　　(m20261312)

0.13 α を実数とする．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2\alpha & \alpha+1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha-3 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \cdots, 5)$ を A の第 i 列のベクトルとする．すなわち，$A = \big(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\big)$ となる．また，$f_A\ :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ が線形従属となる実数 α の値を求めよ．また，このとき，f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ の次元を求めよ．

(2) A が正則かつ A および A^{-1} の成分がすべて整数となるような正の実数 α を求めよ．また，このとき，A^{-1} を求めよ．

(3) (2) で求めた α に対して，A のすべての 4×4 小行列の行列式の最大公約数を求めよ．

(筑波大 2026)　　(m20261313)

0.14 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たす $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の最大値を求めよ．

(3) 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$f(x, y) \geq \alpha$ が　成り立つような実数 α の最大値を求めよ．

(筑波大 2026)　　(m20261314)

0.15 $X,\ Y,\ Z$ を集合として，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の写像 $f\ :\ X \to Y$ に対して，集合 W と全射 $g\ :\ X \to W$ と単射 $h\ :\ W \to Y$ が存在し，$f = h \circ g$ を満たすことを示せ．

(2) $f : X \to Y$ を全射とし，$g_1 : Y \to Z$ と $g_2 : Y \to Z$ を写像とする．$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つことを示せ．

(3) $f : X \to Y$ が全単射であるとき，写像 $g : Y \to X$ が存在して，$g \circ f = \mathrm{id}_X$，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たすことを示せ．ただし，$\mathrm{id}_X : X \to X,\quad \mathrm{id}_Y : Y \to Y$ は恒等写像であるとする．

(筑波大 2026)　　(m20261315)

0.16 以下の重積分を計算せよ．

$$\iint_D (x^2 + 2y^2)\,dxdy, \qquad D = \big\{(x, y)\ \big|\ x^2 + y^2 \leq 4\big\}$$

(筑波大 2026)　　(m20261316)

0.17 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \cos x$ の 3 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_4(x)$ を求めよ.

(2) $g(x) = \tan^{-1} x$ の 3 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $S_4(x)$ を求めよ.
ただし，$\tan^{-1} x$ は $\tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x - \tan^{-1} x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ.

(信州大 2026) (m20261901)

0.18 以下の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^2 \cos 2x \, dx$ を求めよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + 2y)\cos^2(x - 3y)\, dxdy$ を求めよ.
ただし，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x + 2y \leqq x - 3y \leqq \pi\right\}$ とする.

(信州大 2026) (m20261902)

0.19 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} x^4 & y^4 & z^4 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求め，因数分解せよ.

(2) x は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x^4 & 0 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が正則なとき，x が満たす条件を求めよ.
また，そのときの逆行列 A^{-1} の $(1, 1)$ 成分と $(3, 2)$ 成分を求めよ.

(信州大 2026) (m20261903)

0.20 a は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -2a \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ が対角化可能でないとき，a の値を求めよ.

(信州大 2026) (m20261904)

0.21 $(a_n)_{n=1,2,\cdots}$，$(b_n)_{n=1,2,\cdots}$ を収束する実数列とする．次の問いに答えよ.

(1) 実数 α に対して，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ であることの定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$ ならば $\displaystyle\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ であることを示せ.

(富山大 2026) (m20262301)

0.22 次の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A の定める線形写像 $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列の基本変形を行うことにより A の階数を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元および 1 組の基底を求めよ.

(3) $\mathrm{Ker}\, T_A$ の次元および 1 組の基底を求めよ.

(富山大 2026)　　(m20262302)

0.23　$X,\ Y$ を空ではない集合とし，$f\ :\ X \to Y$ を写像とする．次の問いに答えよ．

(1)　A を X の部分集合とするとき，$A \subset f^{-1}\bigl(f(A)\bigr)$ を示せ．

(2)　次の (a) と (b) が同値であることを示せ．

(a)　f は単射である．

(b)　X の任意の部分集合 A に対して　$f^{-1}\bigl(f(A)\bigr) = A$ である．

(富山大 2026)　　(m20262303)

0.24　次の問いに答えよ．

(1)　集合 X 上の同値関係の定義を述べよ．

(2)　集合 X 上の同値関係 $\sim$ について，$x \in X$ の同値類を $[x]$ と表す．$[x] \neq [y]$ であることと，$[x] \cap [y] = \emptyset$ であることが同値であことを証明せよ．ただし，$\emptyset$ は空集合を表す記号である．

(3)　$x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x \sim y$ を，ある整数 n が存在して $x - y = n$ となることと定義する．$\sim$ が $\mathbb{R}$ 上の同値関係であることを証明せよ．

(富山大 2026)　　(m20262304)

0.25　次の関数の第 101 次導関数を求めよ．ただし，$-\pi < x < \pi$ とする．

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(x)}$$

(広島大 2026)　　(m20264101)

0.26　次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\,dxdy, \qquad D = \bigl\{(x, y)\ \big|\ x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\bigr\}$$

(広島大 2026)　　(m20264102)

0.27　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 65\cos(2t)$$

(広島大 2026)　　(m20264103)

0.28　行列 $A = \begin{pmatrix} 6/5 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & 9/5 & 0 \\ a-3 & 0 & a \end{pmatrix}$ が三つの固有値 $b,\ b+1,\ b+2$ をもつとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a,\ b$ は正の整数である．

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ．

(2)　全ての固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3)　A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(広島大 2026)　　(m20264104)