

第 11 章 微分積分 II 《 § 3 重積分 》

93(3) D を () 内の不等式が表す領域とするとき、次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 - 2y + 4)^3}} \quad (2x^2 - 1 \leq y \leq x^2)$$

(名古屋工業大)

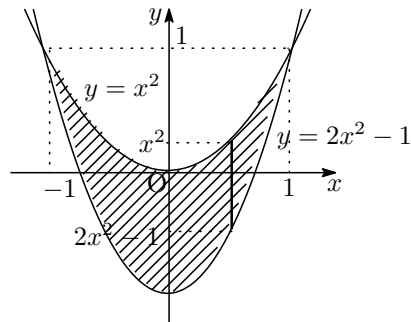
[解] $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases}$

これを解くと、 $x^2 = 1, \therefore x = \pm 1, \quad y = (\pm 1)^2 = 1$ より、
2 曲線の交点は、 $(-1, 1), (1, 1)$ である。

よって、領域は $D : -1 < x < 1, 2x^2 - 1 < y < x^2$ である。

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2 + 2y + 4)^3} = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{2x^2-1}^{x^2} (x^2 - 2y + 4)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx$$

ここで、 $\frac{d}{dy}(x^2 - 2y + 4)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2y + 4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-2y)'$
 $= -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2y + 4)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2) = (x^2 - 2y + 4)^{-\frac{3}{2}}$ であるから、



$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_{-1}^1 \left\{ \left[(x^2 - 2y + 4)^{-\frac{1}{2}} \right]_{2x^2-1}^{x^2} \right\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x^2 + 4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2(2x^2 - 1) + 4}} \right\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{3(2 - x^2)}} \right\} dx \end{aligned}$$

《 ポイント 》 ここで、逆関数の導関数 $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ より、

$$\begin{aligned} \left(\sin^{-1} \frac{x}{2} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \\ \left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} \frac{-1}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^{-1} \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} = \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$