

第2章 微分積分 II 《 § 1 関数の展開 》

58 次の級数の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその値を求めよ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{3^{n-1}} + 3 \left(-\frac{4}{5} \right)^{n-1} \right\} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3(n+2)}$$

(北海道大)

《 ポイント 》 等比数列 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ おいて, $a \neq 0, r \neq 1$ ときの部分 and S_n は

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$-1 < r < 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ だから, } \therefore |r| < 1, \text{ のとき, } \sum_1^{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

[解]

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{3^{n-1}} + 3 \left(-\frac{4}{5} \right)^{n-1} \right\} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5} \right)^{n-1}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + 3 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5} \right)} = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

ゆえに, 級数は収束し, その和は $\frac{14}{3}$

(2) 《 ポイント 》 第 n 部分和を求め, $n \rightarrow \infty$ とする.

$$\text{第 } n \text{ 部分和を } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \text{ とする.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{ より}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = -1 + \sqrt{n+1}$$

《 ポイント 》 前に項が 1 つ残るときは, 後ろにも 1 つ項が残る.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{-1 + \sqrt{n+1}\} = \infty$$

ゆえに, 級数は発散する.

(3) 《 ポイント 17 》 $\square (ii) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する.} \right]$ を利用する.

$$a_n = \frac{n+1}{3(n+2)} \text{ とおくと, ;}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{1}{3} \neq 0$$

ゆえに, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3(n+2)}$ は発散する.