

第 1 章 微分積分 I 《 § 1 積分 》

31

(1) $t = x + \sqrt{x^2 - 1}$ のとき, $\frac{dt}{dx}$ を求めよ.

(2) 積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$ を, 上記の (1) のように, $t = x + \sqrt{x^2 - 1}$ において, $\forall t$ の関数の積分に置換せよ.

(3) 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$ を求めよ.

(お茶の水女子大)

《 ポイント 5 》 x と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) の有理式の積分は,

$t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ とおくと, t の有理式の積分になる. $t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ より

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}-1}(ax^2 + bx + c)' = \sqrt{a} + \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)^{-\frac{1}{2}}(2ax + b)$$

$$= \sqrt{a} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}(2ax + b) = \sqrt{a} + \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + 2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + 2(\sqrt{a})^2x + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + 2\sqrt{a}x + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x) + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$= \frac{2\sqrt{at} + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{at} + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{2\sqrt{at} + b} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{at} + \frac{b}{2}} dt$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{at} + \frac{b}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{at} + \frac{b}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \sqrt{at} + \frac{b}{2} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \sqrt{a} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} \right) + \frac{b}{2} \right| + C$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \sqrt{a} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} \right) + \frac{b}{2} \right| + C$$

【確認】 $a = 1, b = 0, c = -1$ のとき,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C \quad \text{が成り立つ.}$$

[解]

$$(1) \quad t = x + \sqrt{x^2 - 1} = x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \text{ より,}$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x.$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(2) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \text{ において, } t = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ とおくと, } \forall ;$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{t}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{1}{t} dt \text{ だから,}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{t} dt$$

$$(3) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \log |t| + C = \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

【注】 《 ポイント 5 》 の置換積分である．この結果を

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と覚えておくとよい．