

第4章 応用数学《 § 3 複素関数 》

265 複素関数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)}$ に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) $\sin i$ の実部と虚部を求めよ。
- (2) $f(z)$ のすべての極と、それぞれの極の位数を求めよ。
- (3) 複素積分 $\int_{|z|=2} f(z)dz$ (積分路は正の向きで 1 周) の値を求めよ。

(電気通信大)

[解]

- (1) 《 ポイント 》 $\sin z$ の定義をきちんと使う。 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ において、 $z = i$ とおくと。

$$\sin i = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i^2} i = \frac{e^{-1} - e}{-2} i = \frac{e - e^{-1}}{2} i$$

よって、実部は 0, 虚部は $\frac{e - e^{-1}}{2}$

《 ポイント 》 $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$; $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ より、 $z = 1$ のとき、 $\frac{e - e^{-1}}{2} = \sinh 1$

- (2) 《 ポイント 》 分母が 0 になる点で極となる可能性がある。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)} \text{ より,}$$

$f(z)$ が極になり得るのは、分母が 0 になる点だから、 $z = 0$, $z = i$

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \sin z$$

$$= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z^2} \left\{ z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{z-i} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1} + \cdots \right\}$$

$$zf(z) = \frac{1}{z-i} \left\{ 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \cdots \right\}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = i \neq 0$$

よって、 $z = 0$ で 1 位の極である。

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin z}{z^2} = \frac{\sin i}{i^2} = \frac{\sin i}{-1} = -\sin i = -\frac{e - e^{-1}}{2} i \neq 0$$

よって、 $z = i$ で 1 位の極である。

(3) 《 ポイント 》 留数定理を使う.

単純閉曲線 C の内部にある特異点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を除き, C の周および内部で $f(z)$ が正則ならば,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (Res[f, \alpha_1] + Res[f, \alpha_2] + \dots + Res[f, \alpha_n])$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)} \text{ より,}$$

$|z| = 2$ の内部の特異点は $z = 0, z = i$ であり, 留数は (2) より;

$$Res[f, 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = i$$

$$Res[f, i] = \lim_{z \rightarrow i} z f(z) = -\frac{e - e^{-1}}{2} i$$

よって, 留数定理より,

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} f(z) dz &= 2\pi i (Res[f, 0] + Res[f, i]) = 2\pi i \left(i - \frac{e - e^{-1}}{2} i \right) \\ &= 2\pi i^2 \left(1 - \frac{e - e^{-1}}{2} \right) = -2\pi \left(1 - \frac{e - e^{-1}}{2} \right) = \pi \left(e - \frac{1}{e} - 2 \right) \end{aligned}$$