

第 4 章 応用数学《 § 3 複素関数 》

263 $i^i, 3^i$ それぞれについて、実部と虚部を求めよ.

(東京大)

《 ポイント 》 z の対数関数 $\log z = \log |z| + i \arg z$ ($z \neq 0$) を使う.

$$z^\alpha = e^{\log z^\alpha} = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log |z| + i \arg z)}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$[\text{解}] \quad i^i = e^{\log i^i} = e^{i \log i} = e^{i(\log |i| + i \arg i)} = e^{i \log |i| + i^2 \arg i} = e^{i \log |i| - \arg i}$$

$$= e^{-\arg i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = e^{-\frac{4n+1}{2}\pi}$$

よって、実部は $e^{-\frac{4n+1}{2}\pi}$, 虚部は 0

$$3^i = e^{\log 3^i} = e^{i \log 3} = e^{i(\log |3| + i \arg 3)} = e^{i \log |3| + i^2 \arg 3} = e^{i \log |3| - \arg 3}$$

$$= e^{i \log |3| - (0 + 2n\pi)} = e^{i \log |3| - 2n\pi} = e^{i \log 3} e^{-2n\pi} = e^{-2n\pi} e^{i \log 3}$$

$$= e^{-2n\pi} (\cos \log 3 + i \sin \log 3)$$

よって 実部は $e^{-2n\pi} \cos \log 3$, 虚部は $e^{-2n\pi} \sin \log 3$