

第4章 応用数学《 § 2 ラプラス変換・フーリエ解析 》

259 f を周波数とすると、時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる。また、時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t - \tau)d\tau$$

で与えられる。以下の設問に答えよ。

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示せよ。

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示せよ。

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めよ。

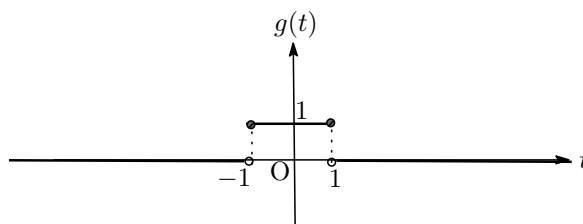
(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めよ。

(北海道大)

[解]

(1)

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < -1, 1 < t) \end{cases}$$



(2) $g(t - \tau) = 1$ となるのは、 $-1 \leq t - \tau \leq 1$ すなわち $t - 1 \leq \tau \leq t + 1$ のとき

$g(\tau) = 1$ となるのは $-1 \leq \tau \leq 1$ のときであり、2つの範囲の共通部分で $g(\tau)g(t - \tau) = 1$ となる。

$t < -2$ のとき、 $t + 1 < -1$ だから、共通部分はない。 $h(t) = 0$

$-2 \leq t \leq 0$ のとき、 $-1 \leq t + 1 \leq 1$ だから、共通部分は $-1 \leq \tau \leq t + 1$

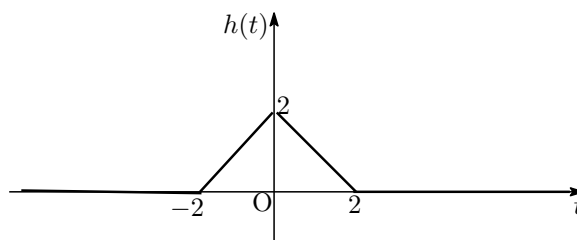
$$h(t) = \int_{-1}^{t+1} 1d\tau = \left[\tau \right]_{-1}^{t+1} = (t + 1) - (-1) = t + 2$$

$0 < t \leq 2$ のとき、 $-1 < t - 1 \leq 1$ だから、共通部分は $t - 1 \leq \tau \leq 1$

$$h(t) = \int_{t-1}^1 1d\tau = \left[\tau \right]_{t-1}^1 = 1 - (t - 1) = -t + 2$$

$t > 2$ のとき、 $1 < t - 1$ だから、共通部分はない。 $h(t) = 0$

$$h(t) = \begin{cases} t + 2 & (-2 \leq t \leq 0) \\ -t + 2 & (0 < t \leq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$



(3) 《 ポイント 》 $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ を利用する.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < -1, 1 < t) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \left[-\frac{1}{i2\pi f} e^{-i2\pi ft} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{i2\pi f} \left[e^{-i2\pi f} - e^{i2\pi f} \right] = -\frac{1}{i2\pi f} \{ e^{-i2\pi f} - e^{i2\pi f} \} \\ &= \frac{1}{\pi f} \left\{ \frac{e^{i2\pi f} - e^{-i2\pi f}}{2i} \right\} = \frac{1}{\pi f} \sin(2\pi f) = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} \end{aligned}$$

【別解】《 ポイント 》 $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ より $i \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$

よって, $e^{-it} = \cos t - i \sin t$

$$\int_{-a}^a \sin t dt = -\left[\cos t \right]_{-a}^a = -\{\cos a - \cos(-a)\} = -\{\cos a - \cos a\} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t)] &= \int_{-1}^1 e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-1}^1 \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-1}^1 \sin(2\pi ft) dt \\ &= 2 \int_0^1 \cos(2\pi ft) dt = 2 \left[\frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} \right]_0^1 = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} \end{aligned}$$

(4) $h(t) = \begin{cases} t+2 & (-2 \leq t \leq 0) \\ -t+2 & (0 < t \leq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad \text{より}$

$$\mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-2}^0 (t+2)e^{-i2\pi ft} dt + \int_0^2 (-t+2)e^{-i2\pi ft} dt$$

ここで,

$$\{(t+2)e^{-i2\pi ft}\}' = 1 \cdot e^{-i2\pi ft} + (t+2) \cdot (-i2\pi f)e^{-i2\pi ft} = e^{-i2\pi ft} + (t+2)(-i2\pi f)e^{-i2\pi ft}$$

$$\frac{1}{-i2\pi f} \{(t+2)e^{-i2\pi ft}\}' = \frac{1}{-i2\pi f} e^{-i2\pi ft} + (t+2)e^{-i2\pi ft}$$

$$\int_{-2}^0 (t+2)e^{-i2\pi ft} dt = \left[\frac{(t+2)e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right]_{-2}^0 - \frac{1}{-i2\pi f} \int_{-2}^0 e^{-i2\pi ft} dt$$

$$= \left(\frac{2e^0}{-i2\pi f} - 0 \right) - \frac{1}{-i2\pi f} \left[\frac{1}{-i2\pi f} e^{-i2\pi ft} \right]_{-2}^0$$

$$= \frac{1}{-i\pi f} - \frac{1}{-i2\pi f} \left(\frac{1}{-i2\pi f} - \frac{1}{-i2\pi f} e^{i4\pi f} \right) = \frac{1}{-i\pi f} + \frac{1}{4\pi^2 f^2} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} e^{i4\pi f}$$

同様にして, $\{(-t+2)e^{-i2\pi ft}\}' = (-1)e^{-i2\pi ft} + (-t+2) \cdot (-i2\pi f)e^{-i2\pi ft}$

$$= -e^{-i2\pi ft} + (-t+2)(-i2\pi f)e^{-i2\pi ft}$$

$$\frac{1}{-i2\pi f} \{(-t+2)e^{-i2\pi ft}\}' = -\frac{1}{-i2\pi f} e^{-i2\pi ft} + (-t+2)e^{-i2\pi ft}$$

$$\int_0^2 (-t+2)e^{-i2\pi ft} dt = \left[\frac{(-t+2)e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right]_0^2 + \frac{1}{-i2\pi f} \int_0^2 e^{-i2\pi ft} dt$$

$$= \left(0 - \frac{2e^0}{-i2\pi f} \right) + \frac{1}{-i2\pi f} \left[\frac{1}{-i2\pi f} e^{-i2\pi ft} \right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{-i\pi f} + \frac{1}{-i2\pi f} \left(\frac{1}{-i2\pi f} e^{-i4\pi f} - \frac{1}{-i2\pi f} \right) = -\frac{1}{-i\pi f} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} e^{-i4\pi f} + \frac{1}{4\pi^2 f^2}$$

$$\begin{aligned}\langle \text{ポイント} \rangle \quad \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 \\ 1 - \cos 2\theta &= 2\sin^2 \theta \\ &\text{を利用する.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathcal{F}[h(t)] &= \int_{-2}^0 (t+2)e^{-i2\pi ft} dt + \int_0^2 (-t+2)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \left\{ \frac{1}{-i\pi f} + \frac{1}{4\pi^2 f^2} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} e^{i4\pi f} \right\} + \left\{ -\frac{1}{-i\pi f} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} e^{-i4\pi f} + \frac{1}{4\pi^2 f^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 f^2} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} e^{i4\pi f} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} e^{-i4\pi f} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 f^2} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} \{e^{i4\pi f} + e^{-i4\pi f}\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 f^2} \left\{ 1 - \frac{e^{i4\pi f} + e^{-i4\pi f}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 f^2} \{1 - \cos 2(2\pi f)\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 f^2} \{2\sin^2(2\pi f)\} \\ &= \frac{\sin^2(2\pi f)}{\pi^2 f^2}\end{aligned}$$

【別解】 (3) より, $\mathcal{F}[g(t)] = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}$ であるから,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[h(t)] &= \mathcal{F}[g(t) * g(t)] = \mathcal{F}[g(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)] \\ &= \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} \cdot \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} = \frac{\sin^2(2\pi f)}{\pi^2 f^2}\end{aligned}$$