

第3章 線形代数《§3 固有値とその応用》

$$\boxed{212} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

を3次正方行列とする。以下の問いに答えよ。

- (1) A の固有値をすべて求めよ。さらに、求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列を1つ求めよ。
- (3) n を2次以上の整数とする。 A^n を求めよ。
- (4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ。

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

(東北大)

[解]

$$\begin{aligned} (1) |A - \lambda E| &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda^2(6-\lambda) + 6 - 11\lambda = 6\lambda^2 - \lambda^3 + 6 - 11\lambda = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ において } \lambda = 1 \text{ とすると, } -(1 - 6 + 11 - 6) = 0$$

よって、因数定理より、 $\textcircled{1}$ は $\lambda - 1$ を因数にもつ。

$$|A - \lambda E| = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

よって、 A の固有値は $|A - \lambda E| = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ より、

$\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$ である。

$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを求める.

$$(A - 1 \cdot E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 6x - 11y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore y = x, z = y$$

$$x = c_1 \text{ とおくと, } x_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

$\lambda = 2$ のときの固有ベクトルを求める.

$$(A - 2 \cdot E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 6x - 11y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore y = 2x, z = 2y = 4x$$

$$x = c_2 \text{ とおくと, } x_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \\ 4c_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

$\lambda = 3$ のときの固有ベクトルを求める.

$$(A - 3 \cdot E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore y = 3x, z = 3y = 9x$$

$$x = c_3 \text{ とおくと, } x_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ 3c_3 \\ 9c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

よって, 固有値 1, 2, 3 のそれぞれに対する固有ベクトルは

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0), \quad c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0), \quad c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ とおき, 逆行列 P^{-1} を求める.

$$\begin{array}{ccc} P & E & \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\begin{array}{l} 2 \text{ 行} - 1 \text{ 行} \times 1 \\ 3 \text{ 行} - 1 \text{ 行} \times 1 \end{array}} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{3 \text{ 行} - 2 \text{ 行} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{2 \text{ 行} - 3 \text{ 行} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{3 \text{ 行} \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{1 \text{ 行} - 2 \text{ 行} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{1 \text{ 行} - 3 \text{ 行} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

よって, P の逆行列は $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -6 & 8 & -2 \\ 3 & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) 《 ポイント 》 $(P^{-1}AP)$ を活用して, A^n を求める方法.

$$A^n = EA E A E A \cdots AE$$

$$A^n = (PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1}) \cdots A(PP^{-1})$$

$$A^n = P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)P^{-1}$$

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$$

$$[\text{解}] \quad A^n = P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)P^{-1}$$

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 - 6 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -5 + 8 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n & 1 - 2 \cdot 2^n + 3^n \\ 6 - 6 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+1} & -5 + 8 \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 3^{n+1} & 1 - 2 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 6 - 6 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+2} & -5 + 8 \cdot 2^{n+2} - 3 \cdot 3^{n+2} & 1 - 2 \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 3 \cdot 2^n + 3^n & -\frac{5}{2} + 2^{n+2} - \frac{3^{n+1}}{2} & \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} \\ 3 - 3 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} & -\frac{5}{2} + 2^{n+3} - \frac{3^{n+2}}{2} & \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} \\ 3 - 3 \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} & -\frac{5}{2} + 2^{n+4} - \frac{3^{n+3}}{2} & \frac{1}{2} - 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[別解] 《 ポイント 》 ケーリ・ハミルトン定理の応用.

異なる α, β, γ に対して, $(A - \alpha E)(A - \beta E)(A - \gamma E) = 0$ が成り立つとき,

$$I = \frac{(A - \beta E)(A - \gamma E)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)},$$

$$J = \frac{(A - \gamma E)(A - \alpha E)}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)},$$

$$K = \frac{(A - \alpha E)(A - \beta E)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)},$$

とおくと, $IJ = JI = JK = KJ = KI = IK = 0$, $I + J + K = E$, $I^2 = I$, $J^2 = J$, $K^2 = K$ が成り立つ,

よって, $A^n = \alpha^n I + \beta^n J + \gamma^n K$ が成り立ち, 利用できる.

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3 \text{ とおくと, } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$A^n = \alpha^n I + \beta^n J + \gamma^n K$$

$$= 1^n \cdot \frac{(A - 2E)(A - 3E)}{(1 - 2)(1 - 3)} + 2^n \cdot \frac{(A - 3E)(A - 1E)}{(2 - 3)(2 - 1)} + 3^n \cdot \frac{(A - 1E)(A - 2E)}{(3 - 1)(3 - 2)}$$

$$= \frac{1}{2}(A - 2E)(A - 3E) - 2^n(A - 3E)(A - E) + \frac{3^n}{2}(A - E)(A - 2E)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} - 2^n \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{3^n}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix} - 2^n \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ 12 & -16 & 4 \end{pmatrix} + \frac{3^n}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \\ 18 & -27 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - 3 \cdot 2^n + 3^n & -\frac{5}{2} + 2^{n+2} - \frac{3^{n+1}}{2} & \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} \\ 3 - 3 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} & -\frac{5}{2} + 2^{n+3} - \frac{3^{n+2}}{2} & \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} \\ 3 - 3 \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} & -\frac{5}{2} + 2^{n+4} - \frac{3^{n+3}}{2} & \frac{1}{2} - 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{2} \end{pmatrix}$$

(4) 《 ポイント 》

$$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3 \cdot 2^n + 3^n & -\frac{5}{2} + 2^{n+2} - \frac{3^{n+1}}{2} & \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} \\ 3 - 3 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} & -\frac{5}{2} + 2^{n+3} - \frac{3^{n+2}}{2} & \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} \\ 3 - 3 \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} & -\frac{5}{2} + 2^{n+4} - \frac{3^{n+3}}{2} & \frac{1}{2} - 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} \\ \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} \\ \frac{1}{2} - 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{2} \end{pmatrix} \text{ であることを利用する.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ 6a_{n-3} - 11a_{n-2} + 6a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで, } A \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

.....

$$A \begin{pmatrix} a_{n-4} \\ a_{n-3} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

辺辺掛けて整理すると,

$$A^{n-3} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{n-2} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ここで, $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$ だから,

$$A^{n-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^{n-2} + \frac{3^{n-2}}{2} \\ \frac{1}{2} - 2^{n-1} + \frac{3^{n-1}}{2} \\ \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } a_n = \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2}$$