

第3章 線形代数 《 § 2 行列と行列式 》

163(1) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大)

[解] 《 ポイント 》 消去法で求める.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 2 \text{ 行} - 1 \text{ 行} \times 1 \\ 3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ 行} \times 2 \\ 2 \text{ 行} - 3 \text{ 行} \times 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -6 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$1 \text{ 行} + 3 \text{ 行} \times 3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{各行} \times \frac{1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{よって, } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

《 ポイント 》 $AA^{-1} = E$ が成り立つことを検算する.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 & 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 & 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} - 1 + \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 & -1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$