

第3章 線形代数《 § 1 ベクトル 》

159 三角形 ABC と点 P が $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく。このとき、 $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 点 P が三角形 ABC の内分にあることを示せ。
- (3) 面積の比 $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA$ を求めよ。

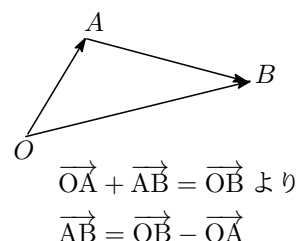
(新潟大)

[解]

《 ポイント 》 平面上の任意の点の位置ベクトルは、2つの線形独立なベクトルの線形結合で、一意的に表せる。

- (1) $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ より

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{AP} + 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ -3\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} &= \vec{0} \\ 8\overrightarrow{AP} &= 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 4\vec{b} + \vec{c} \\ \therefore \overrightarrow{AP} &= \frac{4\vec{b} + \vec{c}}{8} \end{aligned}$$



《 ポイント 》 内分点の位置ベクトルの公式を用いる。

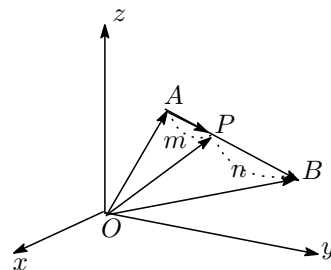
線分 AB を $m : n$ の比に内分する点 P の位置ベクトルは、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

よって、次の公式が成り立つ。

線分 AB を $m : n$ の比に内分する点 P の位置ベクトルは、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n} \quad (m, n \text{ は正の数})$$



- (2) (1) より, $\overrightarrow{AP} = \frac{4\vec{b} + \vec{c}}{8} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4\vec{b} + \vec{c}}{1+4}$

ここで、線分 BC を $1 : 4$ に内分する点を D すると、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}}{1+4} = \frac{4\vec{b} + \vec{c}}{1+4}$$

よって、 $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{8} \overrightarrow{AD}$ であるから、

点 P は線分 AD を $5 : 3$ に内分する点である。したがって、点 P は $\triangle ABC$ の内部にある。

- (3) $\triangle ABC$ の面積を S とする。

$$\triangle PAB = \frac{5}{8} \triangle ABD = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} S = \frac{1}{8} S$$

$$\triangle PBC = \frac{3}{8} S$$

$$\triangle PCA = \frac{5}{8} \triangle ACD = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} S = \frac{4}{8} S$$

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{1}{8} S : \frac{3}{8} S : \frac{4}{8} S = 1 : 3 : 4$$

