

第 11 章 微分積分 II 《 § 4 微分方程式 》

137(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$yy'' + (y')^2 - 5y' = 0$$

(東京大)

《 ポイント 》 x を含まない非線形微分方程式の場合, $y' = p$ とおき, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ を用いる.

$$y' = p \text{ とおくと, } \frac{dy}{dx} = p \text{ より, } y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p = p \frac{dp}{dy} \quad \therefore y'' = p \frac{dp}{dy}$$

[解] $y' = p$ とおくと, $y'' = p \frac{dp}{dy}$

よって, 与式は

$$y \cdot p \frac{dp}{dy} + p^2 - 5p = 0, \quad \therefore p \left(y \frac{dp}{dy} + p - 5 \right) = 0$$

(i) $p \neq 0, p \neq 5$ のとき

$$y \frac{dp}{dy} + p - 5 = 0, \quad \therefore -y \frac{dp}{dy} = p - 5$$

$$\int \frac{1}{p-5} dp = - \int \frac{1}{y} dy$$

$$\therefore \log |p-5| = -\log |y| + c_1$$

$$\log |p-5| + \log |y| = c_1, \quad \log |y(p-5)| = c_1, \quad |y(p-5)| = e^{c_1}$$

$$y(p-5) = \pm e^{c_1}$$

$$\pm e^{c_1} = c_2 \text{ とおくと,}$$

$$y(p-5) = c_2$$

$$p-5 = \frac{c_2}{y}, \quad \therefore p = 5 + \frac{c_2}{y}$$

$$c_2 = 5C_1 \text{ とおくと,}$$

$$p = 5 + \frac{5C_1}{y}$$

$$p = 5 \left(1 + \frac{C_1}{y} \right), \quad p = 5 \cdot \frac{y+C_1}{y}, \quad \therefore \frac{y}{y+C_1} \cdot p = 5$$

$$\frac{y}{y+C_1} \cdot p = \frac{y+C_1-C_1}{y+C_1} p = \left(1 - \frac{C_1}{y+C_1} \right) \frac{dy}{dx} = 5$$

$$\int \left(1 - C_1 \cdot \frac{1}{y+C_1} \right) dy = \int 5 dx + C_2$$

$$\therefore y - C_1 \log |y+C_1| = 5x + C_2$$

よって, 一般解は

$$y - C_1 \log |y+C_1| = 5x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(ii) $p = 0$ のとき, 解 $y = C$ は特異解である. (C は任意定数)

(iii) $p = 5$ のとき, 解 $y = 5x + C$ は一般解に含まれる. (一般解の $C_1 = 0$ のとき)