

第 11 章 微分積分 II 《 § 3 重積分 》

106(2)

D を () 内の不等式の表す領域と考えるとき、次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D xy dx dy \quad (x + 3y \geq 0, x - y \geq 0, x + y \leq 2) \quad (\text{東京海洋大})$$

[解] $u = x + y, uv = y$ と変換するとき、

$$x = u - y = u - uv = u(1 - v), \quad y = uv$$

《 ポイント 》 ヤコビアン $J(u, v)$ を求める。

$$x = u - uv \text{ より, } x_u = 1 - v, x_v = -u$$

$$y = uv \text{ より, } y_u = v, y_v = u$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix}$$

$$= (1 - v) \cdot u - (-u \cdot v) = u - uv + uv = u$$

$$\therefore J(u, v) = u \quad (dxdy = ududv)$$

$$\text{図から, } x + 3y \geq 0 \text{ より, } u(1 - v) - 3uv = u(1 + 2v) \geq 0$$

$$0 \leq u \leq 2 \text{ より, } 1 + 2v \geq 0 \quad \therefore v \geq -\frac{1}{2}$$

$$x - y \geq 0 \text{ より, } u(1 - v) - uv = u(1 - 2v) \geq 0$$

$$0 \leq u \leq 2 \text{ より, } 1 - 2v \geq 0 \quad \therefore v \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, 領域は, } D : 0 \leq u \leq 2, -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}$$

$$\iint_D xy dx dy = \iint_D u(1 - v) \cdot uv \cdot ududv = \iint_D u^3 v(1 - v) du dv$$

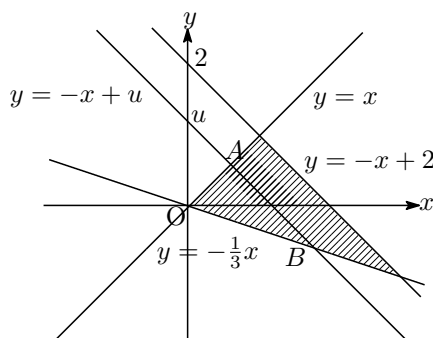
$$= \int_0^2 \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (v - v^2) dv \right\} u^3 du$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{3} v^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^3 du$$

$$= \int_0^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{3} v^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\} u^3 du$$

$$= \int_0^2 \left\{ 0 - \left(\frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24} \right) \right) \right\} u^3 du$$

$$= -\frac{1}{12} \int_0^2 u^3 du = -\frac{1}{12} \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_0^2 = -\frac{1}{12} \cdot 4 = -\frac{1}{3}$$



《 ポイント 》 次のように解くと、 v の意味が分かりやすくなる.

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + u \end{cases}$$

これを解くと、 $x = \frac{1}{2}u$, $y = \frac{1}{2}u$ より、2 曲線の交点は $A\left(\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u\right)$ である.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x \\ y = -x + u \end{cases}$$

これを解くと、 $x = \frac{3}{2}u$, $y = -\frac{1}{2}u$ より、2 曲線の交点は $B\left(\frac{3}{2}u, -\frac{1}{2}u\right)$ である.

y 座標に着目すると、

$$-\frac{1}{2}u \leq y \leq \frac{1}{2}u; \quad -\frac{1}{2}u \leq uv \leq \frac{1}{2}u, \quad 0 \leq u \leq 2 \text{ より } -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}$$

x 座標に着目しても、求めることはできるが、やや面倒である.

$$\frac{1}{2}u \leq x \leq \frac{3}{2}u, \quad \frac{1}{2}u \leq u - uv \leq \frac{3}{2}u, \quad 0 \leq u \leq 2 \text{ より } \frac{1}{2} \leq 1 - v \leq \frac{3}{2},$$

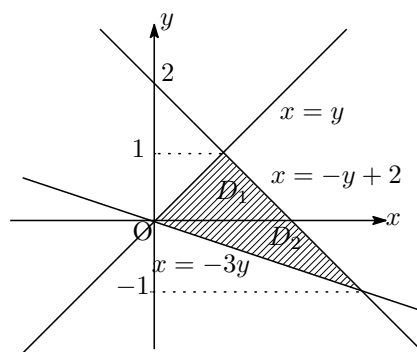
$$-\frac{1}{2} \leq -v \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \geq v \geq -\frac{1}{2}$$

[別解] 領域 D を図の 2 つの領域

$$D_1 : y \leq x \leq 2 - y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$D_2 : -3y \leq x \leq 2 - y, \quad -1 \leq y \leq 0$$

に分割して、 $\uparrow$ 積分ができるように領域を表す.



$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} xy dx dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_y^{(2-y)} x dx \right\} y dy + \int_{-1}^0 \left\{ \int_{-3y}^{(2-y)} x dx \right\} y dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_y^{(2-y)} y dy + \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-3y}^{(2-y)} y dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} (2-y)^2 - \frac{1}{2} y^2 \right\} y dy + \int_{-1}^0 \left\{ \frac{1}{2} (2-y)^2 - \frac{1}{2} (-3y)^2 \right\} y dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} (4 - 4y + y^2) - \frac{1}{2} y^2 \right\} y dy + \int_{-1}^0 \left\{ \frac{1}{2} (4 - 4y + y^2) - \frac{1}{2} \cdot 9y^2 \right\} y dy \\ &= \int_0^1 (2 - 2y) y dy + \int_{-1}^0 \frac{1}{2} (4 - 4y - 8y^2) y dy \\ &= \int_0^1 (2y - 2y^2) dy + \int_{-1}^0 (2y - 2y^2 - 4y^3) dy \\ &= \left[y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 - \left[y^2 - \frac{2}{3} y^3 - y^4 \right]_{-1}^0 \\ &= \left(1 - \frac{2}{3} \right) - \left\{ 1 + \frac{2}{3} - 1 \right\} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$