

大学編入学試験問題集（数学）

群馬工業高等専門学校数学科

2024 年 3 月

目 次		線形代数	29
基礎数学	2	8 ベクトル	29
1 基礎数学	2	9 行列	32
		10 行列式	34
微分積分 I	2	11 連立方程式	35
2 微分	2	12 線形変換	39
3 積分	6	13 固有値とその応用	40
		14 線形空間など	51
微分積分 II	11	応用数学	55
4 級数	11	15 応用数学	55
5 偏微分	13	確率統計	60
6 重積分	17	16 確率統計	60
7 微分方程式	22		

基礎数学

1 基礎数学

1.1 次の文章を読んで、(1), (2), (3), (4), (5) に答えよ.

A と B を集合 $A = \{2, 5, 8, 9\}$, $B = \{3, 4, 5, 9, 10\}$ とする.

集合について次の記法と概念を用いる.

- ・ $X \setminus Y$ は集合 X から集合 Y の要素を除いた集合を表す. 例えば上記の集合 A, B に対しては $A \setminus B = \{2, 8\}$ である.
- ・ 集合 X, Y について $X \cap Y = \phi$ のとき, X と Y は互いに素であるという.
- ・ $n(X)$ は有限集合 X の要素の個数を表す.

(1) 集合 $A \cup B, A \cap B, (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ を要素を書き並べて表わせ.

(2) 次の質問 (a), (b), (c) について理由を説明して答えよ.

- (a) A と B は互いに素であるか.
- (b) A と $B \setminus A$ は互いに素であるか.
- (c) $A \setminus B$ と $A \cap B$ は互いに素であるか.

(3) 集合 X と Y を任意の集合とする. 次の (a), (b), (c), (d) が成り立つことを説明せよ.

- (a) X と $Y \setminus X$ は互いに素である.
- (b) $Y \setminus X$ と $X \cap Y$ は互いに素である.
- (c) $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$ である.
- (d) $Y = (Y \setminus X) \cup (X \cap Y)$ である.

(4) 有限集合 X と Y が互いに素ならば, 次の式が成り立つ. その理由を説明せよ.

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$$

(5) 一般には有限集合 X と Y (互いに素とは限らない) について, 次の式が成り立つ.

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$

(3) の (a), (b), (c), (d) と (4) を用いて, その理由を説明せよ.

(群馬大 2023) (m20231502)

1.2 n 個の元からなる集合 A には 2^n 個の部分集合があることを数学帰納法を用いて証明しなさい.

(山梨大 2023) (m20231804)

微分積分 I

2 微分

2.1 次の極限 (1)~(3) を求めなさい.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x^2 + x - 2) \sin(2x - 2)}{(x^2 + 2x - 3)(x - 1)} \right]^3$$

(秋田大 2023) (m20230403)

2.2 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

(東北大 2023) (m20230502)

2.3 関数 $f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$ について, 以下の問に答えよ. ここで, x の範囲は $-1 \leq x \leq 1$ とする. また, 関数 $\arcsin x$ は $\sin x$ の逆関数であり, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ とする.

(1) $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ.

(2) $y = \frac{d}{dx} f(x)$ が単調減少であることを示せ.

(3) $y = \frac{d}{dx} f(x)$ を xy 平面上に図示せよ.

(東北大 2023) (m20230503)

2.4 実数 p, q は $p > 1, q > 1$ かつ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x \quad (x > 0)$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ と $f'(x)$ を求めよ.

(2) すべての実数 $x > 0$ に対して, $x \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}$ が成り立つことを示せ.

(3) すべての実数 $\alpha > 0, \beta > 0$ に対して, $\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2024) (m20241901)

2.5 $\log y = 1 - xy$ によって $y = f(x)$ が定義されているとき, $f'(0)$ の値を求めよ.

(富山大 2023) (m20232301)

2.6 次の関数 $f(x)$ を微分せよ.

$$(1) f(x) = \log(\log x)$$

$$(2) f(x) = x^x$$

(福井大 2023) (m20232401)

2.7 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

$$(2) y = e^{5x}(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(3) y = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + 3} + 3 \log |x + \sqrt{x^2 + 3}| \right)$$

$$(4) y = \frac{1}{\log 3x}$$

(福井大 2023) (m20232414)

2.8 関数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 8}$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(名古屋工業大 2024) (m20242901)

2.9 次の関数を微分せよ. ただし, e は自然対数の底をあらわす.

(1) $y = x^2 e^{-2x}$

(2) $y = \cos(x \sin 2x)$

(3) $y = x^{\cos x} \quad (x > 0)$

(三重大 2023) (m20233103)

2.10 次の関数の第 n 次導関数を求めよ. ただし $a \neq 0$ とする.

$$\frac{1}{ax+1}$$

(広島大 2024) (m20244102)

2.11 次の極限値を求めよ. ただし, $\sin^{-1} x$ の値域は, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とする.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^{-1} x - \sin^{-1}(2x)}{x^3}$

(愛媛大 2023) (m20234601)

2.12 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{x^3}$$

ただし, $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数である.

(愛媛大 2023) (m20234609)

2.13 極限値 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2x) \right\}$ を求めよ. ただし, $\tan^{-1} x$ は, $\tan x$ の逆関数である.

(佐賀大 2023) (m20234901)

2.14 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = (x^2 + 1)(3x^3 + 2x + 1)$

(2) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$

(3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(4) $y = \log \frac{2x}{1 + \sin x}$

(佐賀大 2023) (m20234906)

2.15 (1) つぎの y を実数 x について微分せよ. ただし, $-\pi/2 < x < \pi/2$ である.

$$y = \log(\cos x)$$

(2) つぎの y を実数 x について微分せよ.

$$y = \tan^{-1} x$$

(3) つぎの極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$$

(佐賀大 2023) (m20234911)

2.16 次の関数を微分せよ.

(1) $e^{3x} \cos 5x$

(2) $\frac{2x}{\log_e 6x}$

(佐賀大 2023) (m20234915)

2.17 下記の極限値を求めなさい.

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \left(\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos(x-h)} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x - x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right\}$$

(佐賀大 2023) (m20234923)

2.18 以下の微分を計算せよ.

$$(1) \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \right)$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left\{ \log(\cos^2 x) \right\}$$

(鹿児島大 2023) (m20235401)

2.19 $\frac{d}{dx} \log_e \left(\sin^2(3x + e^{-x^2}) \right)$ を求めなさい.

(鹿児島大 2023) (m20235407)

2.20 次の関数を変数 x に関して微分しなさい (導出過程も示すこと). なお, 解答は x を用いて表示すること.

$$(1) \frac{1}{\sin x}$$

$$(2) \tan^{-1} \frac{1}{x}$$

$$(3) \ln(\cos x)$$

(鹿児島大 2023) (m20235412)

2.21 球形のシャボン玉の半径が毎秒 a の割合で大きくなっている. このとき, 下記の (1) および (2) に答えなさい. ただし, 円周率は π とする.

(1) ある時刻の半径が b のときの表面積の膨張速度を求めなさい.

(2) ある時刻の半径が b のときの体積の膨張速度を求めなさい.

(鹿児島大 2023) (m20235419)

2.22 (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (a, b) における接線が定点 $(-2, 3)$ を通るとき, a と b の関係式を求めなさい.

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点における接線が常に定点 $(-2, 3)$ を通り $f(4) = 1$ を満たす $f(x)$ を求めなさい.

(鹿児島大 2023) (m20235422)

2.23 次の微分を計算せよ.

$$(1) \frac{d}{dx} \left(2^{\cos x} \right)$$

(室蘭工業大 2023) (m20235501)

2.24 関数 $f(x) = \log_e \left(\sin \frac{1}{x} \right)$ の x による微分を計算しなさい.

(室蘭工業大 2023) (m20235507)

2.25 以下の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 + 3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos^3 x}{x^2}$$

(香川大 2023) (m20235701)

- 2.26 x の 4 次関数 $y = f(x)$ の 2 つの変曲点が $(2, 16)$, $(0, 0)$ であり, 点 $(2, 16)$ における接線が x 軸に平行であるとき, $f(x)$ を求めよ.

(宇都宮大 2023) (m20236104)

- 2.27 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 7x + 1$

(2) $y = (x + 2)e^x$

(3) $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$

(4) $y = \frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^3(x + 3)^4}$

(東京海洋大 2023) (m20236401)

- 2.28 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次のように定義される.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい. 導く過程も示しなさい.

(1) $f(x) = x^2 + x - 6$

(2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$

(東京海洋大 2023) (m20236403)

3 積分

- 3.1 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ について, 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めなさい.

(岩手大 2023) (m20230305)

- 3.2 次の定積分 (1), (2) を求めなさい.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \sin(3x) dx$

(2) $\int_{-1}^4 \sqrt{|x|} dx$

(秋田大 2023) (m20230401)

- 3.3 $0 < s < 1$ とし, 関数 $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x^{s-1}(1-x)^{s-1}$$

と定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\int_0^1 f(x) dx$ が収束することを示せ.

(2) $s = \frac{1}{2}$ のとき, $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ.

(3) $y = 4x(1-x)$ とおき, $\int_0^1 f(x) dx = 2^{1-2s} \int_0^1 y^{s-1}(1-y)^{-\frac{1}{2}} dy$ を示せ.

(お茶の水女子大 2023) (m20230601)

3.4 (1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ を求めよ. ただし, n は正の偶数とする.

(信州大 2023) (m20231902)

3.5 次の定積分を計算せよ.

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

(2) $\int_1^e \frac{\log x}{x^2} \, dx$

(福井大 2023) (m20232402)

3.6 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{2 \tan^{-1} x}{x^2 + 1} \, dx$

(2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(福井大 2023) (m20232415)

3.7 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$

(福井大 2023) (m20232416)

3.8 x 軸と曲線 $y = x^3 + x^2 - 6x$ で囲まれた図形の面積 A を求めよ.

(福井大 2023) (m20232417)

3.9 (1) 広義積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$ を求めよ.

(2) 広義積分 $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} \, dx$ を求めよ.

(3) $\left(\frac{x+a}{x^2+x+1} \right)' = \frac{b}{x^2+x+1} + \frac{c(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$ をみたす実数 a, b, c を求めよ.

(4) 広義積分 $L = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} \, dx$ を求めよ.

(岐阜大 2023) (m20232605)

3.10 不定積分 $\int \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} \, dx$ を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232902)

3.11 不定積分 $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} \, dx$ を求めよ.

(名古屋工業大 2024) (m20242902)

3.12 次の不定積分を求めよ. ただし, e は自然対数の底をあらわす.

(1) $\int \log_e |x| \, dx$

(2) $\int \frac{1}{9 - x^2} \, dx$

$$(3) \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

(三重大 2023) (m20233104)

3.13 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$(2) \int_{-3}^{-1} \frac{2x}{x^2+4x+5} dx$$

$$(3) \int_{-1}^1 (\log_e(x+2))^2 dx$$

(京都大 2023) (m20233304)

3.14 次の広義積分の値を求めよ.

$$(1) \int_0^1 x \log_e x dx$$

$$(2) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$$

(京都大 2023) (m20233305)

3.15 広義積分

$$\int_1^\infty \left(\frac{4}{2x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) dx$$

の値を求めよ,

(京都工芸繊維大 2023) (m20233403)

3.16 不定積分 $\int x e^{-x^2} dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2023) (m20233404)

3.17 放物線 $y = (x+2)^2$ の区間 $-3 \leq x \leq -2$ における曲線の長さ s を求めよ.

(広島大 2023) (m20234102)

3.18 次の定積分と広義積分を求めよ. ただし, α は実数とする.

$$(1) \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

$$(2) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{x^2+2} dx$$

$$(3) \int_e^\infty \frac{1}{x} (\log x)^\alpha dx$$

(愛媛大 2023) (m20234603)

3.19 定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \cos x} dx$$

の値を求めたい.

(i) 上の積分において $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換すると,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

となることを示せ.

(ii) 定積分 I の値を求めよ.

(愛媛大 2023) (m20234610)

3.20 (1) 実数 $a(a \neq 0)$ に対する逆正接関数 $y = \arctan(x/a)$ の微分を求めよ.

(2) 実数 b に対する不定積分

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + 2b^2} dx$$

を求めよ.

(3) 「部分分数への分解」を用いて、次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{dt}{t^4 + 1}$$

(九州大 2023)

(m20234707)

3.21 $\int_0^\infty e^{-x} \sin 2x dx$ を求めよ.

(佐賀大 2023)

(m20234902)

3.22 次の不定積分または定積分を求めなさい. 積分定数は C とする.

(1) $\int (x^3 + 3^x) dx$

(2) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 - 4x - 2}} dx$

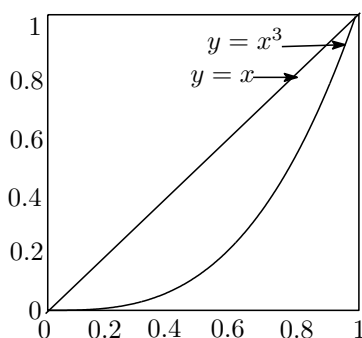
(3) $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

(佐賀大 2023)

(m20234909)

3.23 次の図に示されるように、 x の範囲、 $0 \leq x \leq 1$ において、直線 $y = x$ と曲線 $y = x^3$ で囲まれる領域を直線 $y = x$ 周りに一周回転させた時の体積を求めよ.



(佐賀大 2023)

(m20234912)

3.24 次の定積分を計算せよ.

(1) $\int_0^2 (4x^2 + 5x) dx$

(2) $\int_0^3 \frac{1}{6 + 2x^2} dx$

(佐賀大 2023)

(m20234917)

3.25 以下の不定積分、定積分を計算せよ.

(1) $\int x^2 e^{2x} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$

(鹿児島大 2023)

(m20235402)

3.26 不定積分 $\int x^2 e^{x^3} \sin x^3 dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2023)

(m20235408)

3.27 曲線 $y = \cos^2 \frac{x}{2}$ について、以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で描きなさい.

(2) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において, 曲線と直線 $y = \frac{3}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2023) (m20235411)

3.28 次の積分を計算せよ. なお, 不定積分では積分定数を省略してよい.

(1) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} (x \sin x + x^3 \cos x) dx$

(室蘭工業大 2023) (m20235502)

3.29 不定積分 $\int \log_2 \sqrt{x} dx$ を計算しなさい. なお, 積分定数は省略してよい.

(室蘭工業大 2023) (m20235508)

3.30 次の不定積分を求めよ.

$$\int x \sin(2x) dx$$

(室蘭工業大 2023) (m20235513)

3.31 (1) $0 \leq r \leq 4$ の範囲で, 次の積分が最小となる r を求めよ.

$$\int_r^{r+5} |x^2 - 16| dx$$

(2) xy 平面上で, $y = \sqrt{|x^3 - \alpha^3|}$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ で囲まれた部分を x 軸まわりに回転してできる立体を考える.

(a) 立体の体積を α の関数 $V(\alpha)$ として表せ.

(b) 体積 $V(\alpha)$ の最小値とそれを与える α を求めよ.

(東京都立大 2023) (m20235904)

3.32 次の不定積分ならびに定積分を求めなさい.

(1) $\int \log_e x dx$

(2) $\int (x^2 \cos x) dx$

(3) $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x^3) dx$

(4) $\int_0^2 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

(東京海洋大 2023) (m20236402)

3.33 (1) 不定積分 $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x^2 + 5x + 5} dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\int_0^{e-1} (3x+2) \log(x+1) dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2023) (m20236407)

3.34 不定積分 $\int \tan x dx$ および $\int \tan^{-1} x dx$ を求めよ. ただし, $\tan^{-1}$ は逆三角関数である.

(和歌山大 2023) (m20236503)

微分積分 II

4 級数

4.1 実数 x の関数 $\log x$ を $x = 2$ のまわりでテイラー展開して $(x - 2)^3$ の項まで求めよ.
(お茶の水女子大 2023) (m20230603)

4.2 (1) 2変数関数 $f(x, y) = e^{x+y}$ のマクローリン展開を2次の項まで求めよ.
(2) 2変数関数 $f(x, y) = e^{x+y} \sin x$ のマクローリン展開を3次の項まで求めよ.
(筑波大 2024) (m20241302)

4.3 逆三角関数 $\tan^{-1} x$ について次の問いに答えなさい.
(1) 第3次導関数を求めなさい.
(2) $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ の近似値として $\frac{11}{24}$ を用いた場合, その誤差は $\frac{1}{32}$ を超えないことを示しなさい.
(筑波大 2024) (m20241314)

4.4 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ において,
$$f(x) = \log \cos x$$

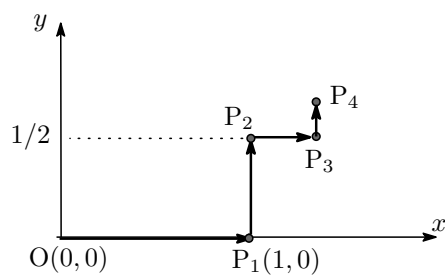
で定義されているとする. このとき, 次に問いに答えよ. ただし, 対数は自然対数である.
(1) $f'(x), f''(x), f'''(x)$ を求めよ.
(2) $f(x)$ の2次までのマクローリン展開を求めよ. また, 剰余項 $R_3(x)$ を求めよ.
(3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ を求めよ.
(信州大 2023) (m20231901)

4.5 マクローリン展開により $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ. (i は虚数を表す)
(福井大 2023) (m20232403)

4.6 関数 $p(x) = e^{-(x-3)^2}$ について, a), b) の いずれか に答えよ.
a) 定積分 $\int_0^\infty (x-3)p(x)dx$ の値を求めよ.
b) 関数 $p(x)$ を $x = 3$ においてテーラー展開し, $(x-3)^2$ を含む項までを残すことにより, x の値が3に近いときに成立する近似式 $p(x) \approx \alpha + \beta(x-3) + \gamma(x-3)^2$ を得る. 係数 α, β, γ の値を求めよ.
(福井大 2023) (m20232424)

4.7 関数 $\log x$ の $x = 1$ を中心とするテイラー展開 (無限和による表示) を求めよ. 収束に関しては調べなくてよい.
(名古屋工業大 2023) (m20232901)

4.8 図に示すように, $OP_1 = 1, P_1P_2 = \frac{1}{2}OP_1, P_2P_3 = \frac{1}{2}P_1P_2, \dots$ と限りなく進むとき, 以下の設問に答えよ.
(1) P_2, P_3, P_4 の座標をそれぞれ求めよ.
(2) 最終的に近づく点の座標を求めよ.



(三重大 2023) (m20233106)

4.9 次の条件 (*) を満たす実数の組 (a_0, a_1, a_2, a_3) を 1 組求めよ.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{実数全体で定義された関数 } R(x) \text{ が存在し,} \\ \text{等式 } x \cos x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + R(x) \text{ と } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^3} = 0 \text{ が成り立つ.} \end{array} \right.$$

(京都工芸繊維大 2023) (m20233402)

4.10 A を正定数とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 正整数 n に対して $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ.
- (2) $\alpha > \sqrt{\alpha + A}$ を満たす正定数 α が存在することを示せ.
- (3) α を $\alpha > \sqrt{\alpha + A}$ を満たす任意の正定数とする. このとき, 正整数 n に対して $a_n < \alpha$ が成り立つことを示せ.
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

(広島大 2023) (m20234105)

4.11 $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ とし, I 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\log(1-x)}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.
- (2) べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$ の収束半径を求めよ.
- (3) 任意の $x \in I$ に対し, $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ が成立することを示せ.
- (4) 広義積分 $\int_0^1 f(x) dx$ が収束することを示せ.
- (5) 広義積分 $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ. ただし, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ であることは証明なしに用いてもよい.

(広島大 2023) (m20234109)

4.12 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ とする.

(1) $f(x)$ の 2 階までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.

(2) $x > 0$ のとき, $\log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) > x - \frac{x^3}{6}$ が成り立つことを示せ.

(愛媛大 2023)

(m20234602)

4.13 n は自然数で, 実数 x は $-1 < x < 1$ であるとする.

(1) 等式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-x)^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}$$

を示せ.

(2) 等式

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt,$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt,$$

を示せ.

(3) 等式

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) + 2 \int_0^x \frac{t^6}{1-t^2} dt$$

を示せ.

(4) $\log 2 > 0.693$ であることを示せ.

(愛媛大 2023)

(m20234611)

4.14 $f(x) = \tan^{-1} x$ ($-1 < x < 1$) をマクローリン展開し, 0 ではない最初の 3 項と n を用いた一般項で表しなさい.

解答例) $f(x) = e^x$ の場合

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

(佐賀大 2023)

(m20234907)

4.15 $0 < x < 1$ のとき, $\sqrt{1+x}$ を $1 + \frac{1}{2}x$ で近似すれば, その誤差は $\frac{x^2}{8}$ で押さられることを示しなさい.

(佐賀大 2023)

(m20234924)

4.16 次の関数を指示された点まわりに, 2 次の項までテイラー展開しなさい. なお, 「2 次の項まで」とは, 級数の各項を次数の低い順に並べた場合, 最初の 3 つの項に相当する.

$$e^{2x}, \quad x = 1 \text{ まわり}$$

(鹿児島大 2023)

(m20235414)

5 偏微分

5.1 関数

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < 2\pi$$

の極大点, 極小点及びそのときの値を求めよ.

(東北大 2023)

(m20230509)

5.2 実数 x と y の関数 $f(x, y) = x^5 e^{x^2 y^3}$ に対して, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ と $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を求めよ.
(お茶の水女子大 2023) (m20230605)

5.3 $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 - 7$ とする. 関係式 $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = g(x)$ の極値をすべて求めよ.
(東京工業大 2023) (m20230801)

5.4 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 y + xy^2 + 2x^2 - xy - 4y^2 - 6x - 12y$ について次の問いに答えなさい.
(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) をすべて求めなさい.
(2) $z = f(x, y)$ の極値を求めなさい.
(東京農工大 2023) (m20230901)

5.5 関数 $f(x, y) = \frac{\cos(2x + 4y)}{1 - 3x + 2y}$ について, 以下の問いに答えよ.
(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, 1\right)$ における接平面の方程式を求めよ.
(2) $f(x, y)$ のマクローリン展開
$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$
に現れる x の係数 a_{10} および y^2 の係数 a_{02} を求めよ.
(電気通信大 2023) (m20231003)

5.6 $ax^2 - bxy^3 + y^6 = 1$ で与えられる xy 平面上の曲線 C が点 $(1, 1)$ を通るとする (a, b は定数). このとき, 以下の問いに答えよ.
(1) a, b が満たすべき条件を求めよ.
(2) a が $3 \leq a \leq 4$ の範囲を動くとき, 点 $(1, 1)$ において曲線 C の接線の傾き $\frac{dy}{dx}$ がとりうる値の範囲を求めよ.
(筑波大 2024) (m20241301)

5.7 領域 $D = \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 18\}$ 上で与えられた関数
$$f(x, y) = xy(x - 4)(y + 4)$$
について, 以下の各問に答えよ,
(1) D の内部において $f(x, y)$ が極値をとる点の候補をすべて探し, それらの点における $f(x, y)$ の値を求めよ.
(2) D の境界 $\{(x, y) \mid (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 18\}$ 上における $f(x, y)$ の条件付極値をとる点の候補を, ラグランジュの未定乗数法によりすべて探し, それらの点における $f(x, y)$ の値を求めよ.
(3) $f(x, y)$ の最大値・最小値を求めよ.
(筑波大 2024) (m20241308)

5.8 xy 平面内の領域 D を $D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$ とする. D から $\mathbf{R}$ への 2 変数関数
$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^{3/2}}$$
について, 次の小問に答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ を求めよ.

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \{f_x(x, y) + f_y(x, y)\}$ が存在するかどうか調べ, 存在する場合にはその値を求めよ.

(茨城大 2023) (m20231702)

5.9 $z = \frac{3y}{x}$ のとき, $\frac{\partial z}{\partial x}$ と $\frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(富山大 2023) (m20232302)

5.10 下記の関数 $f(x, y)$ について, 導関数 $\frac{df}{dt}$ を求めよ.

$$f(x, y) = \sin x + \cos y, \quad x(t) = \cos 2t, \quad y(t) = \sin 2t$$

(福井大 2023) (m20232404)

5.11 xy 平面の第 1 象限 ($x > 0$ かつ $y > 0$ の領域) において以下の関数 $f(x, y)$ を考える. ただし, $\log$ は自然対数を表す.

$$f(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 12 \log(x + y)$$

以下の a) ~ c) の すべて に答えよ.

a) 1 次の偏導関数 f_x, f_y を求めよ.

b) 第 1 象限において, $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる点の座標 (x, y) を求めよ.

c) 第 1 象限において関数 $f(x, y)$ は極大値をとる. このことがわかっているものとして, その極大値を求めよ.

(福井大 2023) (m20232425)

5.12 関数 $f(x) = \log(\log(x + 1) + 1)$ を考える. ただし, $\log$ は自然対数を表す.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開の 2 次までの項を求めよ.

(2) $g(x, y) = f(xy - 1)$ とし, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1), \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 1)$ を求めよ.

(岐阜大 2023) (m20232604)

5.13 関数 $f(x, y) = (2y^2 + 3y - 2) \sin((2x + y)\pi)$ について答えよ.

(1) 偏導関数 f_x, f_y をそれぞれ求めよ.

(2) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ において, $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ をみたす点 (x, y) をすべて求めよ.

(豊橋技科大 2023) (m20232702)

5.14 領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする.

関数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x$ の D における最大値と最小値を求めよ,

(名古屋工業大 2023) (m20232904)

5.15 関数 $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2024) (m20242903)

5.16 (1) a, b を正の実数とする. xy 平面上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を次式で定義する.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

このとき, $f(x, y)$ の全微分を求め, 曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ.

(2) t を実数とする. xyz 空間内の 3 変数関数 $g(x, y, z)$ を次式で定義する.

$$g(x, y, z) = xe^{xy} - z$$

このとき, 曲面 $g(x, y, z) = 0$ 上の点 $(t, 1, te^t)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた接平面は t の値によらずある定点 P を通る. 定点 P の座標を求めよ.

(大阪大 2023) (m20233505)

5.17 x, y の 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める. $f(x, y)$ が次の関数のときに Δf を求めよ. ただし, 以下において, i は虚数単位である.

(1) $f(x, y)$ は $(x^2 - iy^2)(1 + i) + e^{x+iy}$ の実部.

(2) $f(x, y)$ は $\frac{1}{x + iy}$ の虚部.

(3) $f(x, y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$

(4) $f(x, y) = \sum_{k=0}^{20} (-1)^k \binom{40}{2k} x^{40-2k} y^{2k}$

(神戸大 2023) (m20233803)

5.18 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{x-y}$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ と y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ を求めよ.

(2) $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ となる点をすべて求めよ.

(3) (2) で求めたそれぞれの点で, $f(x, y)$ は極値をとるか否か判定し, その理由を述べよ.

(4) $f(x, y)$ の最大値および最小値が存在するか否か判定し, その理由を述べよ. また, 存在する場合はその値を求めよ.

(広島大 2023) (m20234107)

5.19 $f(x, y) = \tan^{-1}(x - y) - (x - y)^2 - x + \log y$ とする. ただし, $\tan^{-1} x$ の値域は, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とする.

(a) $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ.

(b) $f(x, y)$ は, 点 $(1, 1)$ で極値をとるか判定せよ.

(愛媛大 2023) (m20234604)

5.20 $z = f(x, y)$, $x = 3u - 2v$, $y = u + 2v$ のとき, 偏導関数 z_u と z_{uv} を $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ で表せ.

(佐賀大 2023) (m20234903)

5.21 関数 $z = \cos^{-1}(xy)$ の 2 次偏導関数を全て求めなさい.

(佐賀大 2023) (m20234908)

5.22 次の関数の偏微分 $f_x, f_y, f_{xy}, f_{xx}, f_{yy}$ を計算せよ.

$$f(x, y) = 4x^5y^3 - 7x^3 + 3y^2 - 5x^3y^2$$

(佐賀大 2023) (m20234916)

5.23 $z = f(x, y)$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ のとき,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

となることを示しなさい.

(佐賀大 2023) (m20234926)

- 5.24 2変数関数 $f(x, y) = e^{xy}$ の2階までの偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ をすべて求めよ.

(宮崎大 2023) (m20235302)

- 5.25 以下の関係式から, dy/dx を求めよ (導出過程も示すこと. 解答には x, y の両方を用いてよい). なお, y は x に依存して変化するものとする. また, 導関数 dy/dx は存在すると仮定してよい.

$$x^2y - \sin y = 1$$

(鹿児島大 2023) (m20235413)

- 5.26 以下の関数の全微分を求めなさい.

$$f(x, y) = xy$$

(鹿児島大 2023) (m20235415)

- 5.27 以下の関数 f について2階の偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

(香川大 2023) (m20235702)

- 5.28 2変数関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 4)^2 - 12(x - y)^2$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y)$ の第1次と第2次の偏導関数をすべて求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.
- (2) 関数 $f(x, y)$ の停留点をすべて求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.
- (3) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2023) (m20236103)

- 5.29 関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 + 3x^2 - 9x$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2023) (m20236408)

- 5.30 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$ のすべての極値とそれを与える (x, y) の値を求め, さらに, 極大か極小か答えよ.

(和歌山大 2023) (m20236504)

6 重積分

- 6.1 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 1 \leq y \leq 2\}$ のとき, 関数 $f(x, y) = x \sin(xy)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $g(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^2 + x^2 f(x, y)^2$ を求めよ.

- (2) 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D g(x, y)^{\frac{1}{4}} \sin(xy) \, dx dy$$

(東北大 2023) (m20230504)

- 6.2 (1) 次の二重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \leq 2xy, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- (2) a, b を正の実数とする. xyz 空間内において, 円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ と三平面 $z = b, z = \frac{b}{a}y, z = -\frac{b}{a}y$ によって囲まれる部分の体積を求めよ.

(東京工業大 2023) (m20230802)

- 6.3 領域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1 \right\}$ における次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D y \, dx dy$$

(東京農工大 2023) (m20230902)

- 6.4 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{(y+3)^2} \, dx dy \quad D : |2x - y| \leq 1, 0 \leq x \leq 7$$

(電気通信大 2023) (m20231004)

- 6.5 半径 2 の球があり, 球の中心から距離 r の位置の密度 (単位体積あたりの質量) は $9 - 4r$ で与えられる ($0 \leq r \leq 2$). この球を水平な机の上に置き, 机面から高さ 3 の水平な面で切断して上部を切り出した. 切り出した部分の質量を M とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) M は球の中心を原点とする 3 次元極座標で

$$M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{[a]} \sin \theta \, d\theta \int_{[b]}^{[c]} dr$$

と表される. $[a], [b], [c]$ に入る数または数式を求めよ.

- (2) M の値を求めよ.

(筑波大 2024) (m20241303)

- 6.6 $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ とする. 2 次元実数空間 $\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和は, それぞれ正整数 m に対して,

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \frac{1}{m^2}$$

で与えられている. $f(x, y) = e^{x+y}$ であるとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和である $R_m(f)$ を求めよ. ただし, $Z = e^{1/m}$ とおくこと.
 (2) (1) で得られたリーマン和を用いて, 関数 $f(x, y)$ の E 上での 2 重積分を求めよ.
 (3) 関数 $f(x, y)$ の E 上での累次積分を求めよ.

(筑波大 2024) (m20241307)

- 6.7 $a > 0$ とする. 自然数 n に対し, 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{t^2 + x^2 + a^2} \, dt$$

と定める.

- (1) $f_n(x)$ を求めよ.
 (2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上 $\frac{\pi}{2\sqrt{x^2 + a^2}}$ に一様収束することを示せ.

(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y > x\}$ とする. このとき広義積分

$$\iint_D \frac{y}{y^2 + a^2} \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx dy$$

は収束することを示し, その値を求めよ.

(筑波大 2024) (m20241312)

6.8 xy 平面内の有界閉領域 $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$ 上の 2 重積分

$$\iint_E \frac{x-y}{(x+y)^{3/2}} dx dy$$

を計算せよ.

(茨城大 2023) (m20231703)

6.9 2 重積分 $\iint_D x^2 dx dy$ を求めよ. ただし, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ とする.

(信州大 2023) (m20231903)

6.10 実数 p は $p > 2$ を満たすとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^p} dx$ を求めよ.

(2) $D_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2, x \leq y\}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおき, 領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{|xy|}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$$

を考える. このとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(p)$ を求めよ.

(信州大 2024) (m20241902)

6.11 xy 平面において, 領域 D を

$$D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

と定義する. 下の問いに答えなさい.

(1) 重積分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ を求めなさい.

(2) 定積分 $\int_1^2 r \log r dr$ を求めなさい.

(3) 重積分 $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2023) (m20232103)

6.12 次の二重積分の積分値を求めよ.

$$\iint_D e^{y^2} dx dy \quad \left(D : x \geq 0, y \leq 1, y \geq \frac{1}{2}x \right)$$

(富山大 2023) (m20232303)

6.13 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_R \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad R : x^2 + y^2 \leq 1$$

(福井大 2023) (m20232405)

- 6.14 xy 平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ に対し, 以下の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy \, dxdy$$

(福井大 2023) (m20232426)

- 6.15 次の重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_D y \sin(x+y) dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid x+y \leq \pi, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(2) \iint_D xy dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid \left|x - \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leq 1, \left|x + \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leq 2\}$$

(豊橋技科大 2023) (m20232703)

- 6.16 微積分に関して, 以下の空欄に当てはまる数値または数式を解答用紙の該当する箇所に記述せよ.

関数 $f(x, y) = e^{-3x}y^2$ について $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \boxed{1}$ であり, $f(x, y)$ の全微分は

$df = \boxed{2}$ である. また, $\int_0^3 \int_0^3 f(x, y) \, dxdy = \boxed{3}$ である.

$x^2 - y^2 = 1, x > 0, y > 0$ の条件下では $x = \boxed{4}$ のとき, $f(x, y)$ は最大値をとる.

(豊橋技科大 2023) (m20232706)

- 6.17 領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする.

$\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232903)

- 6.18 領域 $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ において, 重積分

$$\iint_D \frac{|y|}{x^2 + 1} \, dxdy$$

の値を求めよ.

(名古屋工業大 2024) (m20242904)

- 6.19 xy 平面内の図形

$$D : 0 \leq y \leq x \leq 2$$

を考える. 重積分 $\iint_D e^{-x^2} dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2023) (m20233405)

- 6.20 (1) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x, y \geq 0\}$ とする. 積分 $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ とする. 積分 $\iint_D e^{-x^2-y^2} \cos(ax^2 + ay^2) dxdy$ を求めよ. ただし, a は実数である.

(3) D は $\mathbf{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y = x$ について線対称であるとする. 積分 $\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4} dxdy$ を求めよ.

(神戸大 2023) (m20233804)

- 6.21 円柱面 $x^2 + y^2 = bx$ と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ の両者によって囲まれる部分の体積 V を求めよ.

(広島大 2023) (m20234103)

6.22 領域 $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ について以下の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_S (x+y)^2 dx dy$$

(広島大 2024) (m20244103)

6.23 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x, 2y + x \leq 6\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\iint_D \frac{1}{(x+y-10)^2} dx dy$ を求めよ.

(愛媛大 2023) (m20234605)

6.24 $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, $1 < b < \sqrt{2}$ とする. また, $\phi = \arccos(1/b)$ ($\cos \phi = 1/b$, $0 < \phi < \pi/2$ を満たすラジアン角) とする. 以下の定積分を考える.

$$V = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x, y) dy dx \cdots (*)$$

(1) xy 平面上で $(*)$ によって $f(x, y)$ が積分される領域を図示せよ.

(2) 以下の等式が成立することを $t = \sin \theta$ と置換して積分することで示せ. ただし, C は積分定数である.

$$\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right| + C$$

(3) V の定積分を求めよ. ただし b などを用いて ϕ を消去したものを示せ.

(九州大 2023) (m20234708)

6.25 (1) $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ とするとき, $\iint_D (x^2 - 2y) dx dy$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq \pi, 0 \leq x - y \leq \pi\}$ とするとき, $\iint_D (x + y) \sin(x - y) dx dy$ を求めよ.

(佐賀大 2023) (m20234904)

6.26 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \left(\frac{y}{x} + \frac{2x}{y} \right) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e^2, 1 \leq y \leq e\}$$

(佐賀大 2023) (m20234918)

6.27 $I = \iint_D \sqrt{x} dx dy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ について答えなさい.

(1) 集合 D を図示しなさい.

(2) 重積分 I を求めなさい.

(佐賀大 2023) (m20234927)

6.28 重積分 $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$ の値を求めよ.

(宮崎大 2023) (m20235303)

6.29 以下の関数 f の領域 D における重積分を求めよ.

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(香川大 2023) (m20235703)

- 6.30 (1) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$ に対し, 重積分

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{y^3+1}} dx dy \text{ の値を求めよ.}$$

- (2) $E = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x, 0 \leq x\}$ に対し, 重積分

$$\iint_E xy dx dy \text{ の値を求めよ.}$$

(東京海洋大 2023) (m20236409)

- 6.31 xy 平面上で, $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$ が表す領域を D とする. 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy dx dy$$

(和歌山大 2023) (m20236505)

7 微分方程式

- 7.1 (1) 次に示す微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

の一般解を求めなさい.

- (2) 次に示す微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 1 = x$$

の一般解を, $\frac{dy}{dx} = p$ を利用して求めなさい.

(北海道大 2023) (m20230101)

- 7.2 微分方程式 $y'' + 4y' + 5y = g(x)$ について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) $g(x) = 0$ のときの一般解を求めなさい.
- (2) $g(x) = 2e^{-x}$ のときの一般解を求めなさい.
- (3) (2) のときの「 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 」を満たす特殊解を求めなさい.

(岩手大 2023) (m20230306)

- 7.3 (1) 微分方程式 $t^{-1} \frac{d}{dt} f(t) = 4f(t)^2 - 1$ の解を求めよ. ただし, 解 $f(t)$ は初期条件 $f(0) = 1$ を満たすものとする.

- (2) 微分方程式 $\frac{d}{dt} f(t) = (-\tan t + \cos t)f(t) + \cos^2 t$ の解を求めよ. ただし, 解 $f(t)$ は初期条件 $f(0) = 0$ を満たすものとする.

- (3) 微分方程式 $\frac{d^2}{dt^2} f(t) - 2 \frac{d}{dt} f(t) + af(t) = 0$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, a は 1 より大きい正の実数とする.

(a) 一般解を求めよ.

- (b) 解 $f(t)$ は 2 つの条件 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ を同時に満たすものとする. このとき, 与えられた微分方程式が「恒等的に $f(t) = 0$ となる解」以外の解をもつ a の値をすべて求めよ.

(東北大 2023) (m20230505)

7.4 常微分方程式 $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} = t + \sin t$ の一般解を求めよ。ただし、 x と t は実数の変数である。
(お茶の水女子大 2023) (m20230608)

7.5 以下の (1)~(3) に答えよ。

(1) $x - y$ 平面上にある以下の曲線群 (a) および (b) を満たす微分方程式を求めよ。

(a) $x^2 + y^2 = c^2$

(b) $y = a \sin 2x + b \cos 2x$

(2) 以下の微分方程式 (c) および (d) の一般解を求めよ。

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

(d) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$

(3) 大腸菌の増殖速度は各時刻 t での個数 N に比例する。ある条件下において 10 個の大腸菌が 20 分で 20 個となった。同条件下において、10 個の大腸菌は 3 時間後には何個になるか求めよ。

(お茶の水女子大 2023) (m20230609)

7.6 微分方程式に関する以下の問いに答えよ。

(1) 以下の微分方程式について考える。

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t) \{x(t)\}^m$$

ただし、 m を $m \neq 0, 1$ なる実定数とする。また、 $x(t), f(t)$ は実関数とし、任意の t について $x(t) > 0$ を満たすものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(a) ある 0 でない実数 α を用いて、 $z = \{x(t)\}^\alpha$ なる変数変換を行うことで、 z に関する線形微分方程式が得られる。このときの α を m を用いて表せ。

(b) e を自然対数の底とする。 $m = \frac{2}{3}$, $f(t) = e^{\frac{t}{3}}$ のとき、 $x(0) = 1$ なる初期条件のもとで $x(t)$ についての微分方程式を解け。

(2) 正の実数 A, B を係数にもつ以下の連立微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -2A \{x(t)\}^2 + 2By(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = A \{x(t)\}^2 - By(t) \end{cases}$$

$x(t), y(t)$ は時刻 t の関数であり、 $t = 0$ において $x(0) = \frac{B}{A}$, $y(0) = 0$ とする。また、任意の時刻 t で $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0$ を満たすとき、以下の問いに答えよ。

(a) 任意の時刻 t において $x(t) + 2y(t) = \frac{B}{A}$ となることを示せ。

(b) 十分長い時間が経過したとき $x(t)$ がある値 u に収束した。このとき u の値を A, B を用いて表せ。

(c) 微分方程式を解き $x(t)$ を求めよ。

(d) $x(t)$ および $y(t)$ の概形を図示せよ。

(東京大 2023) (m20230701)

7.7 次の微分方程式の解 $y = y(x)$ で、 $y(0) = 0, \frac{dy}{dx}(0) = 1$ を満たすものを求めなさい。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 2e^x \cos 2x$$

(東京農工大 2023) (m20230904)

7.8 次の微分方程式を与えられた初期条件のもとで解け.

$$y'' - 5y' + 6y = 10 \sin x \quad \text{初期条件 : } y(0) = 0, y'(0) = 0$$

(電気通信大 2023) (m20231005)

7.9 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad y(x+1)^2(x^2+1) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \sin \frac{y}{x}$$

(横浜国立大 2023) (m20231103)

7.10 (1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} - 4y = e^{3x}$ の一般解を求めなさい.

(3) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = e^{3x}$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2023) (m20232102)

7.11 次の微分方程式について、以下の問いに答えよ. ただし、 a, b は正の定数であり、 a と b の間には、 $a > \sqrt{b}$ の関係が成り立つものとする.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

(1) 一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ を満たす解を求めよ.

(3) (2) で求めた解で、 y が最大となる場合の t の値を求めよ.

(富山大 2023) (m20232306)

7.12 次の常微分方程式を解け. ただし、 n は自然数とする.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 6n$$

(福井大 2023) (m20232411)

7.13 次の微分方程式について、積分因子を求めて解きなさい.

$$(x^2 - y^3)dx + 3xy^2dy = 0$$

(福井大 2023) (m20232412)

7.14 独立変数を t とし、 x, y を t の関数とする. このとき、下記の連立微分方程式について答えよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x - y = e^t \\ \frac{dy}{dt} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \end{cases}$$

(1) この連立微分方程式の一般解を求めよ.

(2) 初期条件「 $t = 0, x = 0.5, y = 5$ 」のもとで解を求めよ.

(福井大 2023) (m20232429)

7.15 n を自然数とする. $x > 0$ の範囲で, 常微分方程式の初期値問題

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + \frac{n}{x}y = e^{-x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

を考える. また, $a > 0$ に対して, $I_n(a) = \int_0^a e^{-u} u^n du$ と定める. 以下の問に答えよ.

- (1) $n = 1$ のときの (E) の解を求めよ.
- (2) $I_{n+1}(a) - (n+1)I_n(a)$ を a と n を用いて表せ.
- (3) $n = 3, a = 1$ とする. $I_3(1)$ を求めよ.
- (4) $\lim_{a \rightarrow \infty} (I_{n+1}(a) - (n+1)I_n(a))$ を求めよ.
- (5) $n = 3$ のときの (E) の解 y について, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 y(x)$ を求めよ.

(岐阜大 2023) (m20232607)

7.16 (1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = e^x y^2$ を解け.

- (2) (1) で得られた解の中で $x = 0$ のとき $y = 1$ をみたす関数の $-1 \leq x \leq 0$ における最小値を求めよ.

(豊橋技科大 2023) (m20232705)

7.17 微分方程式に関して, 以下の空欄に当てはまる数値または数式を解答用紙の該当する箇所に記述せよ.

関数 $x(t)$ の t に関する 1 階微分を $x'(t)$, 2 階微分を $x''(t)$ とする. m, E_0, ω を正の実定数として微分方程式が以下のように与えられたとする.

$$mx''(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

$x(0) = 0, x'(0) = v_0$ とすると, $x(t) = \boxed{5}$ である.

このとき $x'(t)$ の最小値は $\boxed{6}$ である.

(豊橋技科大 2023) (m20232707)

7.18 微分方程式に関して, 以下の空欄に当てはまる数値または数式を解答用紙の該当する箇所に記述せよ.

関数 $x(t)$ の t に関する 1 階微分を $x'(t)$, 2 階微分を $x''(t)$ とする. m, k, R を正の実定数として微分方程式が以下のように与えられたとする.

$$mx''(t) = -kx(t) - Rx'(t)$$

この微分方程式に対する特性方程式が共役な虚数解をもつ条件は $R < \boxed{7}$ である.

(豊橋技科大 2023) (m20232708)

7.19 以下の問いに答えよ. ただし, $\frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2 u}{dx^2} = u''$ と記すこととする.

- (1) $xy'' + 2y' - 4xy = 0$ について考える. x の関数 u を用いて $y = \frac{u}{x}$ とおくと, $u'' + au = 0$ (a は定数) の形に変形できることを示せ. また, これを利用して y についての一般解を求めよ.
- (2) $x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0$ について考える. この解が $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で表されるとき, x^n の項の係数 a_n を n の関数で表せ. ただし, $a_0 = 1$ とする.

(名古屋大 2023) (m20232803)

7.20 以下の微分方程式の一般解とそれぞれの初期条件を満たす特殊解を求めよ．ただし， e は自然対数の底をあらわす．

(1) $y \frac{dy}{dx} - x = 2$ (初期条件 $x = 0, y = 3$)

(2) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \log_e x$ ($x > 0$) (初期条件 $x = e, y = e$)

(三重大 2023) (m20233105)

7.21 次の問いに答えなさい．ただし， $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ である．

(1) $y = x^{2x}$ ($x > 0$) のとき， y' を求めなさい．

(2) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$ ，(C は定数) を証明しなさい．

(3) $y'' - 2y' - 3y = e^{5x}$ の一般解を求めなさい．

(三重大 2023) (m20233110)

7.22 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{6xy}{x^2 - 3}$

(2) $x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + xy + 4y^2$

(3) $x \frac{dy}{dx} + y = 3x^4 y^3$

(京都大 2023) (m20233301)

7.23 次の全微分方程式の積分因子は $x^\alpha y^\beta$ の形を持つ．この方程式の一般解を，積分因子の未定係数の α と β を求めた上で定数 C を用いて求めよ．

$$(2x^2y + 2y^2)dx + (x^3 + 3xy)dy = 0$$

(京都大 2023) (m20233302)

7.24 未知の関数 $y(x)$ と $z(x)$ ($x > -1$) に対する連立常微分方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x} & 2+x \\ 0 & \frac{1}{(1+x)(2+x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad (x > -1)$$

の，初期条件 $\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たす解 $y(x)$, $z(x)$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2023) (m20233406)

7.25 以下の問いに答えよ．ただし， y は x の関数， y' は 1 階微分を示す．

(1) 次の微分方程式を解け．

$$xyy' = x^2 e^{y/x} + y^2 \quad (x \neq 0)$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$(e^x + 1)y' + y - 1 = 0$$

(大阪大 2023) (m20233502)

7.26 (1) 微分方程式 $y'' + \sqrt{5}y' - y + 2 = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 上記の解のうち, $x > 0$ で $y(x) > 0$ となるものをすべて求めよ.

(神戸大 2023) (m20233802)

7.27 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

(広島大 2023) (m20234101)

7.28 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2e^x \sin x$$

(広島大 2024) (m20244104)

7.29 次の式 (A) に関する以下の問いに解答しなさい.

$$(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0 \quad (A)$$

(1) 式 (A) が完全微分形であることを示しなさい.

(2) 式 (A) の一般解を求めなさい.

(山口大 2023) (m20234301)

7.30 次の微分方程式に関する問いに答えよ. ただし, a と g は実定数とする.

$$\frac{dv}{dt} + av = g$$

ア) $a > 0, g = 0$ のときの解 $v(t)$ を求めよ. ただし, 初期条件を $v(0) = 0$ とする.

イ) $a > 0, g > 0$ のときの解 $v(t)$ を求めて, 解を図示せよ. ただし, 初期条件を $v(0) = 0$ とする.

(高知大 2023) (m20234504)

7.31 以下の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ. なお, y' は $y(x)$ の x に関する 1 階導関数を表す.

(1) $y' = (y^2 - 1)x$

(2) $y'' + 2y' + 10y = 0$

(3) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

(九州大 2023) (m20234702)

7.32 N を時刻 t における放射性元素の原子の個数とすると, 以下の問いに答えなさい.

(1) 単位時間あたりに崩壊する原子数は N に比例する. この変化を, 比例定数 λ ($\lambda > 0$) を用いて微分方程式で表しなさい.

(2) $t = 0$ における N の値を N_0 として, N_0 が半分になるまでの時間 τ を求めなさい.

(3) 放射性元素 ^{14}C の τ は約 5730 年である. ある木片中の ^{14}C の割合が大気中の $1/8$ になっていたとき, この木が枯れたのは何年前か答えなさい. ただし, 大気および生育木中の ^{14}C の割合は等しく一定であるとする. 必要であれば $\ln 2 = 0.693$ を用いなさい.

(佐賀大 2023) (m20234910)

7.33 a, b を正の数とする. x の関数 y とその導関数について

$$\frac{dy}{dx} = ay \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

が成り立つとする. また $x = 0$ のとき $y = y_0 > 0$ であり, すべての x に対して $y \neq 0, y \neq b$ であるとする. y を x の関数として表せ.

(佐賀大 2023) (m20234914)

7.34 次の常微分方程式を解け.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10x = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 3$$

(佐賀大 2023) (m20234919)

7.35 以下の方程式の一般解を求めなさい.

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \cos x$$

(佐賀大 2023) (m20234929)

7.36 (1) 次の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

(2) 関数 $y = f(x)$ が次の微分方程式を満たすとき, $f(x)$ を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} = x(2y-1)^2$$

ただし, $x = 0$ のとき $y = 1$ である.

(熊本大 2023) (m20235202)

7.37 (1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = -3y + 2$ を, $y(0) = 0$ という条件の下で解け.

(2) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dy}{dx} + 2$ を, $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ という条件の下で解け.

(宮崎大 2023) (m20235305)

7.38 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad 2xy \frac{dy}{dx} = 5x^2 + 3y^2$$

$$(2) \quad y'' + 8y' + 16y = xe^{-3x}$$

$$(3) \quad y'' + 2y' + 4y = 4$$

(鹿児島大 2023) (m20235403)

7.39 つぎの微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = e^{2x}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235506)

7.40 次の微分方程式の一般解を求めよ. なお, 任意定数は C_1 , C_2 を用いること.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 5e^{2x}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235512)

7.41 (1) 以下の微分方程式を満たす $y(x)$, $z(x)$ の一般解をそれぞれ求めよ.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2, \quad 3\frac{dz}{dx} + 6z = 10$$

(2) 前問 (1) で得られた一般解を用い, 以下の境界条件を満たす $y(x)$, $z(x)$ の解をそれぞれ求めよ.

$$y(0) = 11, \quad z(0) = -\frac{25}{3}$$

- (2) H の座標を求めなさい.
- (3) 四面体 OABC の体積 V を求めなさい.
- (4) $\triangle ABC$ の面積 S を求めなさい.

(岩手大 2023) (m20230301)

- 8.3 ベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が一次独立であるとき, $\{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3, -\mathbf{a}_1\}$ が一次独立であるかどうか調べよ.

(岩手大 2023) (m20230308)

- 8.4 原点を $O(0, 0, 0)$ とする 3 次元ユークリッド空間の点 $A(x_0, y_0, z_0)$ と点 $P(x, y, z)$ について, それぞれの位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{p}$ とし, ベクトル $\vec{p} - \vec{a}$ の大きさを $|\vec{p} - \vec{a}|$ と表す. 点 A は定点であるものとして, 以下の設問 (1)~(3) に答えなさい.

- (1) x_0, y_0, z_0, x, y, z を用いて, 方程式 $\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ を表しなさい. また, この方程式を満たすすべての点 P からなる集合が, どのような図形を表すか答えなさい.
- (2) x_0, y_0, z_0, x, y, z を用いて, 方程式 $|\vec{p} - \vec{a}|^2 = r^2$ ($r > 0$ は定数) を表しなさい. また, この方程式を満たすすべての点 P からなる集合が, どのような図形を表すか答えなさい.
- (3) 設問 (1) および (2) の方程式を同時に満たすすべての点 P からなる集合が, どのような図形を表すか答えなさい.

(秋田大 2023) (m20230402)

- 8.5 点 O を原点とする xyz 空間において, 中心を点 $A(2, 3, -1)$, 半径を 1 とする球面 α , 中心を点 $B(4, 5, -2)$, 半径を r とする球面 β がある. 以下の問いに答えよ. ただし, r は正の実数とする.

- (1) 距離 $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ.
- (2) 球面 α と β が共有点をもつとき, r の満たす条件を求めよ.
- (3) 球面 α と β が交わってできる円 S の面積が $\frac{5\pi}{9}$ となるときの, r の値を求めよ. ただし, $r < |\overrightarrow{AB}|$ とする.
- (4) (3) によって r が決まるとき, 円 S の中心座標と, 円 S を含む平面の方程式をそれぞれ求めよ.

(東北大 2023) (m20230501)

- 8.6 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ に属する 3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がある. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がはいずれも長さが 1 であり, これらの間の内積が $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}, (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$ を満たすとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がなす角を求めよ.
- (2) p, q, r をそれぞれ実定数とする. ベクトル $\mathbf{v} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}$ について, 内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ の値を p, q を用いて表せ.
- (3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が 1 次独立である場合, 内積 $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ の値が $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ をとることはあり得ないことを示せ.

(福井大 2023) (m20232428)

- 8.7 三角形 ABC において, $\angle ABC = 90^\circ$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{BC}| = 1$ とする. 三角形 ABC の内部に存在する点 Q が下記の条件を満たすとする.

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AQ}|} + \frac{\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BQ}|} + \frac{\overrightarrow{CQ}}{|\overrightarrow{CQ}|} = \vec{0}$$

- (1) $\angle BQC, \angle AQB$ を求めよ.

(2) $|\overrightarrow{AQ}| + |\overrightarrow{BQ}| + |\overrightarrow{CQ}| = \sqrt{7}$ であることを示せ.

(3) $|\overrightarrow{AQ}|, |\overrightarrow{BQ}|, |\overrightarrow{CQ}|$ を求めよ.

(名古屋大 2023) (m20232801)

8.8 座標空間において3つの平面

$$x + 3z = a, \quad x + (a+1)y - z = -1, \quad x + 6y - 9z = a - 6$$

の共通部分が直線 l であるとき、定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232905)

8.9 xyz 空間内の点 $A(0, 1, 2)$, $B(3, 0, -1)$, $C(4, 1, 0)$ を通る平面の方程式をベクトルの外積を用いて求めなさい.

(三重大 2023) (m20233101)

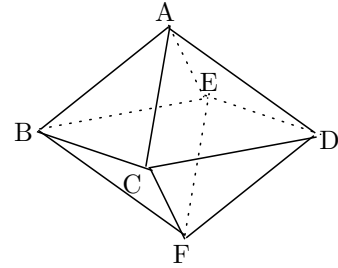
8.10 ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位 (長さ = 1) ベクトルを求めなさい.

(山口大 2023) (m20234302)

8.11 一辺の長さが 6cm の正八面体 ABCDEF がある.

(1) 頂点 A, F および辺 BC, 辺 DE の中点を通る正八面体の断面の面積を求めなさい.

(2) 円周率を π としたとき、正八面体の内接球の体積を求めなさい.



(山口大 2023) (m20234303)

8.12 2つの3次元ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で張られる平行四辺形の面積を求めよ.

(佐賀大 2023) (m20234920)

8.13 点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする直交座標系 $O-xyz$ において、点 $A(-3, 2, 5)$, 点 $B(2, 7, 3)$, 点 $C(1, -2, -3)$, 点 $D(-4, 8, 3)$ を4つの頂点とする四面体の体積 V を求めよ.

(鹿児島大 2023) (m20235404)

8.14 直交座標系 $O-xyz$ で表される空間内に、3点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(3, 3, 3)$ を通る平面 S がある.

(1) 平面 S の法線ベクトル $\vec{n}$ を求めなさい.

(2) 平面 S の方程式を求めなさい.

(鹿児島大 2023) (m20235409)

8.15 xy 平面上に $x - 2y = -2$ で表される直線 L がある. x 方向の単位ベクトル $\mathbf{i}$ と y 方向の単位ベクトル $\mathbf{j}$ を用いて、直線 L の単位法線ベクトルが $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ と表せるとき、 $\mathbf{a}$ の x 方向成分 a_1 と y 方向成分 a_2 の値を求めよ.

(鹿児島大 2023) (m20235416)

- 8.16 直線 $x - 1 = \frac{y - 1}{2} = z - 2$ と点 $(2, 1, -1)$ を含む平面の方程式を求めなさい。ただし、 x, y, z は実数である。

(鹿児島大 2023) (m20235421)

- 8.17 (1) 2つのベクトル $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$ の両者と直交する、長さが1のベクトルを求めなさい。
 (2) 3つのベクトル $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{y} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{z} = (1, 6, 2)$ が、線形独立または線形従属のいずれであるかを、その理由も含めて答えなさい。

(室蘭工業大 2023) (m20235509)

- 8.18 以下の直線 g_1, g_2 に平行で、点 $(2, 3, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

$$g_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{3}, \quad g_2 : x+3 = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{3}$$

(香川大 2023) (m20235705)

- 8.19 (1) 2つのベクトル $\vec{A} = (a, 7, -3)$, $\vec{B} = (-2, b, 3)$ について、 $\vec{A} - 3\vec{B}$ と $2\vec{A} + \vec{B}$ が平行になるときの a, b の値を求めよ。
 (2) ベクトル $\vec{A} = (1, 1, -1)$, $\vec{B} = (2, 0, -1)$, $\vec{C} = (2, 1, -2)$ の張る平行六面体の体積を求めよ。
 (3) ベクトル $\vec{A} = (-3, 1, 2)$ および $\vec{B} = (-2, 3, 4)$ の両方に垂直で大きさが9のベクトルを求めよ。

(東京都立大 2023) (m20235903)

- 8.20 2つのベクトル $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$ が、いずれも原点 $(0, 0, 0)$ を始点として存在しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を求めよ。
 (2) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の成す角の大きさを求めよ。

(宇都宮大 2023) (m20236105)

9 行列

- 9.1 xy 平面上の点 (x, y) を原点のまわりに θ だけ回転する回転行列 $R(\theta)$ は、次のように表される。

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- (1) xy 平面上の点 (x, y) を原点のまわりに θ だけ回転した点の座標を求めなさい。
 (2) α, β を任意の角度とすると、 $R(\alpha)$ と $R(\beta)$ の積を求めなさい。
 (3) xy 平面上の点 $(8, 12)$ を原点のまわりに $\frac{5}{12}\pi$ だけ回転した点の座標を求めなさい。

(岩手大 2023) (m20230302)

- 9.2 (1) A, B を n 次の正方行列とし、 $n \geq 2$ とする。次の式は、一般に成り立つかどうかを答えよ。成り立つならば証明を与え、成り立たないならば反例を与えよ。

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

(2) 次の行列が正則であるための条件を求め、そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(岩手大 2023) (m20230307)

9.3 行列 A と B を以下のように定める.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、以下の問いに答えよ.

(1) $A + B$ の階数 $\text{rank}(A + B)$ を求めよ. さらに行列式 $\det(A + B)$ の値を求めよ.

(2) 正の整数 n に対し, A^n と B^n を求めよ.

(3) AB と BA を求めよ. さらに, 正の整数 n に対し, $(A + B)^n$ を求めよ.

(電気通信大 2023) (m20231001)

9.4 次のベクトルと行列の計算をなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2023) (m20232418)

9.5 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & -6 & 10 \\ 3 & -5 & 11 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

(福井大 2023) (m20232420)

9.6 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, E は 2 次の単位行列とする. $ACB = E$ となる 2 次正方行列 A, B がないことを示せ.

(岐阜大 2023) (m20232602)

9.7 α, β, γ を実数とし, A を 3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えよ.

(1) A が逆行列をもつ条件を α, β, γ を用いて答えよ.

(2) $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 1$ とするときの A の逆行列を求めよ.

- (3) y_1, y_2, y_3 を実数とする. xy 平面上の 3 点 $(-1, y_1), (0, y_2), (1, y_3)$ を通過する二次関数が下に凸となる条件を y_1, y_2, y_3 を用いて示せ.

(九州大 2023) (m20234705)

- 9.8 $n \times n$ 型行列 A の逆行列 A^{-1} とは, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を満足する $n \times n$ 型行列のことである (I は $n \times n$ 型の単位行列である). この関係を利用して, 行列 A と行列 C の積 AC の逆行列 $(AC)^{-1}$ が, 行列 C の逆行列 C^{-1} と行列 A の逆行列 A^{-1} の積 $C^{-1}A^{-1}$ に等しくなることを証明せよ.

(鹿児島大 2023) (m20235417)

- 9.9 $A_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2023) (m20235503)

- 9.10 以下の行列 A の逆行列を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235510)

10 行列式

- 10.1 以下の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

(横浜国立大 2023) (m20231102)

- 10.2 3 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のうち, 正則な行列の行列式の値と逆行列を求めよ.

(信州大 2023) (m20231904)

- 10.3 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a^2 & a^3 \\ a & a^3 & a^5 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし a は定数とする.

- (1) 行列式 $|A|$ を因数分解せよ.
- (2) 行列 A の階数を求めよ.

(名古屋工業大 2024) (m20242905)

- 10.4 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ. また, 行列 A が正則であるかどうかを調べよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2023) (m20235405)

10.5 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ について, A^2, A^3, A^8 を求めなさい.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} a & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-3 \end{pmatrix}$ の行列式が 0 となる a の値を全て求めなさい.

(鹿児島大 2023) (m20235410)

10.6 (1) 次の行列 A について, 行列式 $\det A = 0$ を満たす x を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & x \\ x & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列 B について, 余因子行列 $\text{adj} B$ と逆行列 B^{-1} を求めよ.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(東京都立大 2023) (m20235901)

11 連立方程式

11.1 a を複素数とし, 次の方程式を考える.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = -1 \end{cases}$$

以下の (1), (2), (3) それぞれについて, その条件を満たすための a の条件を求めよ.

- (1) この方程式は一意的な解を持つ.
- (2) この方程式は 2 つ以上の解を持つ.
- (3) この方程式は解を持たない.

(東北大 2023) (m20230506)

11.2 x, y, z, w を未知数とする次の連立一次方程式を, 実数 a, b の値に応じて解け.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z + 5w = 0 \\ 3x + y + 5z + 6w = -1 \\ -x + y - 3z + aw = 3 \\ 4x + y + 7z + 7w = b \end{cases}$$

(東京工業大 2023) (m20230803)

11.3 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 5t \\ t+4 \\ 2t+3 \\ -t+6 \end{pmatrix}$ とする. ここで t は実数である.

- (1) a, b, c が線形独立となるための条件を求めなさい.

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \mathbf{c}$ となる $\mathbf{c}$ を $\mathbf{d}$ とする. $\mathbf{d}$ を求めなさい.

(3) 次の連立一次方程式の解 $\mathbf{x}$ を求めなさい.

$$(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2024)

(m20241315)

11.4 a, b を実定数とするととき, x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + (b+2)y + (a-4)z = b+4 \\ -x + (b-4)y + 8z = 0 \\ x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

を解け.

(信州大 2024)

(m20241903)

11.5 以下の連立方程式が解を持つか判別し, 持つならば解を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(福井大 2023)

(m20232406)

11.6 次の連立方程式を行列の形式で表し, ガウスの消去法かクラメル公式を用いて解け

$$\begin{cases} x - 5y - z = -2 \\ 2x + y + 3z = -7 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

(福井大 2023)

(m20232419)

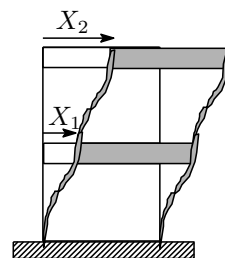
11.7 図のような 2 層構造物モデルが振動する時の各層の振幅 X は次式を満足する. なお ω は固有円振動数 ($2\pi/T$), T は固有周期である. このとき, 以下の問いに答えなさい.

$$\begin{pmatrix} 500 - \omega^2 & -200 \\ -200 & 200 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) 振幅 X がゼロ以外の値を持つための条件を示せ.

(2) 上記の条件より, 固有周期 T を求めなさい.

(3) 固有周期 T に対応する, 各層の振幅の比を求めよ.



(福井大 2023)

(m20232423)

11.8 x, y, z, w を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} -2x + y + z + w = 1 \\ 2x - y + 3z + w = 2 \end{cases}$$

を解け.

(岐阜大 2023)

(m20232601)

11.9 a, b を実数とする. 3 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトル, 3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ b & a & ab \end{bmatrix}$$

を係数行列とする連立 1 次方程式

$$(\#) \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

を考える. ただし, $\boldsymbol{o}$ は 3 次零ベクトルとする.

(1) (i) A の行列式を求めよ.

(ii) $a = b$ のとき, 方程式 $(\#)$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ 以外に解をもつことを示せ.

(2) (i) A の階数を求めよ.

(ii) A の階数が最も小さくなるような a, b に対し, 方程式 $(\#)$ の解を求めよ.

(愛媛大 2023)

(m20234608)

11.10 a を実定数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の行列 A の階数を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$$

(2) 次の連立方程式が解を持つための a の条件を求めよ.

$$\begin{cases} x + y + z + aw = 1 \\ x + y + az + aw = 2 \\ x + ay + az + aw = 3 \\ ax + ay + az + aw = 4 \end{cases}$$

(3) (2) で定義した連立方程式に対して, $w = 0$ となるような解 (x, y, z, w) が存在するための a の条件を求めよ.

(九州大 2023)

(m20234701)

11.11 (1) 次の行列の階数 (ランク, rank) を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

(佐賀大 2023)

(m20234913)

11.12 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} -5x + 15y + z - 8w = 0 \\ 4x - 12y - 5z - 2w = 21 \\ 2x - 6y - z + 2w = 3 \end{cases}$$

(佐賀大 2023) (m20234921)

11.13 連立一次方程式 $\begin{cases} 3x - 7y + 6z = -11 \\ x + 4y - 3z = 13 \\ 10x + 2y - z = 27 \end{cases}$ を解きなさい.

(佐賀大 2023) (m20234925)

11.14 次の連立 1 次方程式において, ただ 1 組の解が存在する場合の定数 k の値を定めよ. また, その時の解を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2023) (m20235418)

11.15 以下の連立方程式が無数の解をもつとき, a, b が満たす条件を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}$$

(香川大 2023) (m20235704)

11.16 次の連立 1 次方程式について下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} ax + y - 3z = 0 \\ -x + ay + 3z = 0 \\ -3x - y + az = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(1) 連立 1 次方程式 (1) の係数行列

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -3 \\ -1 & a & 3 \\ -3 & -1 & a \end{bmatrix}$$

の行列式を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(2) 連立 1 次方程式 (1) が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の解を持つときの a の値を求めよ. ただし, a は実数とする. なお, 計算過程も記入せよ.

(3) (2) で求めた実数 a の値に対し, 連立 1 次方程式 (*) の解を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2023) (m20236101)

11.17 (1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ を満たす実数 a をすべて求めよ.

(2) 定数 a について場合分けして, 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x - y - az = -1 \\ x + ay + az = 1 \end{cases}$$

を解け.

(東京海洋大 2023) (m20236405)

12 線形変換

12.1 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めなさい。
- (2) $f(x)$ の極値および変曲点を調べ、増減表を作成しなさい。
- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めなさい。
- (4) $f(x)$ の概形を描きなさい。

(岩手大 2023) (m20230304)

12.2 3次元列ベクトル $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ を、まず y 軸回りに角度 θ ($0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$) 回転し、次に x 軸回りに角度 ϕ ($0 < \phi < \pi$, $\phi \neq \frac{\pi}{2}$) 回転し、最後に xy 平面 ($z = 0$) に投影して $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$ を得る変換を、行列 T を用いて

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

と表すものとする。

座標系は右手系とし、各軸回りの回転は右ねじの方向を正とする (図 4.1)。

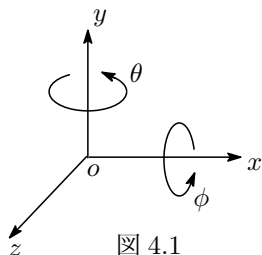


図 4.1

(1) 行列 T を、 θ , ϕ を用いて表せ。

ここで、3次元列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ行列 T によって変換して得られる3次元列ベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ とする。

(2) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ を求めよ。

以下では、 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ となる場合を考える。

(3) このとき、 $\sin \theta$ と $\sin \phi$ の値を求めよ。

(4) (3) の結果を用いて、 xy 平面 ($z = 0$) における、原点を始点とする $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ のすべての組み合わせの略図を描き、それぞれの場合に $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が相互になす角度を記せ。

(東京大 2023) (m20230704)

12.3 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における基底の 1 つを $\{v_1, v_2, v_3\}$ とする。また、実定数 α によって定まる線形写像 $f_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は、

$$f_\alpha(v_1) = v_2 + \alpha v_3, \quad f_\alpha(v_2) = v_3 + \alpha v_1, \quad f_\alpha(v_3) = v_1 + \alpha v_2$$

を満たすとする。解答にあたり、以下を用いてよい：ユークリッド空間内の図形を正方行列 M で変換するとき、行列式の絶対値 $|\det M|$ は、 M が 2 次正方行列であれば変換前後の図形の面積の拡大率、 M が 3 次正方行列であれば変換前後の図形の体積の拡大率である。以下の各問いに答えよ。

- (1) $\alpha = 1$ とする。 $\mathbb{R}^3$ 内にある体積 1 の立方体を C とすると、 $f_1(C)$ の体積はいくつか。
- (2) $\alpha = z$ のとき、 f_z によって $\mathbb{R}^3$ 内のすべての点は、ある平面 P に移される。 z の値はいくつか。
- (3) 前問の平面 P 上に、面積 1 の正方形 S を考える。前問の z に対して、 $f_z(S)$ の面積はいくつか。

(九州大 2023) (m20234706)

13 固有値とその応用

13.1 次の行列 A について、以下の設問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) $a = 4$ のとき、固有値と固有ベクトルを求めなさい。
- (2) $a = -1$ のとき、 A は回転を表す行列の定数倍であることを利用して、 A^{20} を求めなさい。

(北海道大 2023) (m20230103)

13.2 xy 平面上の点 (x, y) を原点のまわりに θ だけ回転する回転行列 $R(\theta)$ は、次のように表される。

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$R(\theta)$ の固有値を求めなさい。

(岩手大 2023) (m20230303)

13.3 行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ および P の逆行列 P^{-1} を用いて、行列 A が $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ と対角化される。

- (1) 行列 A の固有値が 3 と 5 であることを説明しなさい。
- (2) 設問 (1) の 2 つの固有値それぞれに対応する行列 A の固有ベクトルを答えなさい。
- (3) 行列 P の逆行列 P^{-1} を求めなさい。
- (4) n を自然数として、 A^n を求めなさい。

(秋田大 2023) (m20230404)

13.4 (1) 次の x, y, z についての 1 次方程式系の解の 個数 を、 a の値で場合分けして求めよ。

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ -2x + ay + 4z = 2 \\ -4x + 6y + (a+8)z = -4 \end{cases}$$

(2) 次の行列の対角化可能性を、固有空間の次元を調べることで判定せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) 実行列について次の問いに答えよ.

(a) 対称行列と直交行列の定義を述べよ.

(b) 直交行列によって対角化可能な行列は対称行列であることを示せ.

(c) 対称行列の固有値は実数であることを示せ.

(お茶の水女子大 2023) (m20230602)

13.5 行列 H の固有値と規格直交化された 2 つの相異なる固有ベクトルを求めよ. ただし, 行列 H は次式で与えられるとする.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2023) (m20230607)

13.6 t は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & -1 & t \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ について, 行列式 $|A|$ の値が -3 となる時, 次の問いに答えなさい.

(1) t の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ と実数 c に対して, $A\mathbf{v} = c\mathbf{v}$ が成り立つような実数の組 (a, b, c) をすべて求めなさい.

(東京農工大 2023) (m20230903)

13.7 (1) 以下の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) n を正の整数とする. 上記の行列 A の n 乗を求めよ.

(横浜国立大 2023) (m20231101)

13.8 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ は 2 つの固有値 λ_1, λ_2 を持ち, $\lambda_1 < \lambda_2$ とすれば $\lambda_1 = -8$ である. この A について以下の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1 = -8$ に対する方程式 $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ の一般解を, 一次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とパラメータ s, t を用いて $\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ の形で表せ.

(2) (1) で求めた一般解を, 正規直交系をなすベクトル $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ とパラメータ u, v を用いて $\mathbf{x} = u\mathbf{c} + v\mathbf{d}$ の形で表せ.

(3) $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{x}''_0$ の形に分解せよ. ただし $\mathbf{x}'_0$ は (2) で求めた $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ を用いて $\mathbf{x}'_0 = u\mathbf{c} + v\mathbf{d}$ の形に表せるベクトル, $\mathbf{x}''_0$ は $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ に直交するベクトルである.

(4) (3) で求めた $\mathbf{x}''_0$ が A の固有ベクトルとなることを示せ.

(5) 自然数 n に対して $A^n\mathbf{x}_0$ を求めよ.

13.9 m 次正方行列 A について、次の行列 S_n を考える.

$$S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

ただし、 E は単位行列を表し、 $\det(E - A) \neq 0$ とする. このとき、以下の各問に答えよ.

- (1) 行列 A は対角化可能であるとする. つまり、適当な正則行列 P により $P^{-1}AP = D$ (対角行列) が成り立つ. $(E - A)S_n$ を E, P, D を用いて表せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ が零行列 O となるとき、行列の無限等比級数 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は収束する (ある行列に限りなく近づく). 収束のための条件を行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を用いて示せ. また、そのときの $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.
- (3) 行列 A を用いて表される線形システム $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$ を考える. ここで、 m 次元ベクトル $\mathbf{d}$ はパラメータであり、 m 次元ベクトル $\mathbf{x}$ は $A, \mathbf{d}$ の条件から定まる解である. 任意の非負の要素を持つ $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ に対して、非負の解 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ を持つための行列 A の条件を 1 つ示せ. ただし、(2) の条件は満たされるものとする.

(筑波大 2024) (m20241305)

13.10 以下の式を考える.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$

$$\text{ここで、}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \text{とする.}$$

- (1) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ.
- (3) 上式を満たす $\mathbf{X}$ を求めよ.

(山梨大 2023) (m20231801)

13.11 a, b は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2ab-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ab-3 & a \\ 0 & -b & 3ab-2 \end{pmatrix}$ が対角化可能なとき、 a と b が満たす条件を求めよ.

(信州大 2023) (m20231905)

13.12 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A が対角化可能かどうか判定せよ. また、対角化可能であれば、対角化せよ.
- (2) 行列 B が対角化可能かどうか判定せよ. また、対角化可能であれば、対角化せよ.

(信州大 2024) (m20241904)

13.13 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つあげなさい. また, その P に対する $P^{-1}AP$ を求めなさい.
- (3) 2 次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\text{tr}(M) = a + d$ とおく. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{tr}(A^n))}{n}$ を求めなさい.

(長岡技科大 2023) (m20232104)

13.14 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ について, 以下の (1), (2) を求めよ.

- (1) 固有値 λ 及び固有ベクトル $\vec{x}$
 (2) 行列 A を対角化した行列 D

(富山大 2023) (m20232304)

13.15 A を 3 次正方行列とし, 以下の関係を示す.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式を求めよ.
 (2) 行列 A を対角化せよ.

(福井大 2023) (m20232407)

13.16 以下の行列 A に関する問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (1) A の固有値を求めよ.
 (2) A の固有値を λ_1 及び λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) としたとき, 下記の関係を満たす正方行列 P_1 及び P_2 を求めよ, ただし, E は二次正方行列の単位行列である.

$$\begin{cases} A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \\ E = P_1 + P_2 \end{cases}$$

(福井大 2023) (m20232408)

13.17 次の行列の固有値と最大の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2023) (m20232421)

13.18 右の行列について以下の問いに答えよ. $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ ただし, $x \neq n\pi$

- (1) 実数の範囲で固有値の有無を確認しなさい.
 (2) 複素数まで拡張して固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2023) (m20232422)

13.19 正方行列 A が, ある正の整数 k について

$$A^k = O$$

を満たすとき, A をべき零行列と呼ぶ. ここで, A^k は A を k 回かけ合わせる演算

$$A^k = \overbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}^{k \text{ 回}}$$

を表し, O は A と同じサイズの零行列である. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 必要に応じて次に示す定理 1~3 を用いてよい.

定理 1 正方行列 P, Q に対して $\det(P \cdot Q) = \det P \cdot \det Q$ ($\det X$ は X の行列式)

定理 2 正方行列 P が固有値 λ を持つとき, P^k は λ^k を固有値に持つ (k は正の整数)

定理 3 正方行列が零行列のとき, その固有値は 0 (ゼロ) である

(1) 次の正方行列 (a) ~ (d) は, 各々べき零行列であるか? 理由と共に答えよ.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) べき零行列の行列式は 0 である. この性質を次の様に証明した. 空欄 (a) と (b) に入れるべき式または値を答えよ.

証明) A をべき零行列とすると, ある正の整数 k に対して $A^k = O$ となる. $\det A^k$ に定理 1 を繰り返し用いると $\det A^k = (a)$ と書け, 左辺は零行列の行列式であるから, その値は (b) である. 以上より, $(\det A)^k = 0$ となって $\det A = 0$ が示される.

(3) べき零行列の固有値は 0 である. この性質を次の様に証明したい. 証明を完成させよ.

証明) A をべき零行列とすると, ある正の整数 k に対して $A^k = O$ となる.

A の任意の固有値を λ とおくと, 定理 2 から A^k は...

(4) 正方行列 A と B が $AB = BA$ を満たしており, A はべき零行列とする. このとき, AB も

べき零行列となる. この性質を証明せよ. 【ヒント】 $(AB)^k = \overbrace{(AB)(AB)(AB) \cdots (AB)}^{k \text{ 回}}$

(福井大 2023) (m20232427)

13.20 次の両方の条件をみたす 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ をすべて求めよ.

・ 固有値は 2 のみ

・ 固有値 2 についての固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ただし $c \neq 0$) のみ

(岐阜大 2023) (m20232603)

13.21 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & 0 \\ a-2 & 1 & 2a \end{pmatrix}$ (a は実数) とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値に 0 があるとき, 実数 a を求めよ.

(2) 行列 A の固有値に 1 があるとき, 実数 a を求めよ.

(3) 行列 A が (2) の条件を満たすときの A の固有値をすべて求めよ.

- (4) 微分可能な関数 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ とその導関数 $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$ の満たす式が下のようにな与えられている．関数 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ を求めよ．ただし， a は (2) で求めた実数とする．

$$\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \\ h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2023) (m20232606)

13.22 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 行列 A の固有値 λ_1 , λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) を求めよ．
- (2) 任意の自然数 n に対して, $A^{n+1} = 3A^n - 2A^{n-1}$ が成り立つことを示せ．ただし, $A^0 = E$ とする．
- (3) 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ を

$$A^{n+1} - \lambda_1 A^n = a_n A + b_n E, \quad A^{n+1} - \lambda_2 A^n = c_n A + d_n E \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める．ただし, λ_1 , λ_2 を (1) で求めた A の固有値とする．このとき, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

- (4) A^n を求めよ．ただし, n は自然数とする．

(豊橋技科大 2023) (m20232701)

13.23 行列 $A = \begin{bmatrix} s & 1-s \\ 1-t & t \end{bmatrix}$ を考える．ただし, s と t は $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数の定数である．以下の問いに答えよ．

- (1) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ．
- (2) A^n を求めよ．ただし, n は自然数とする．
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ．

(名古屋大 2023) (m20232802)

13.24 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ．

- (1) P の逆行列を求めよ．
- (2) P の列ベクトルを左から順に $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ とおいたとき,

$$A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{p}_2, \quad A\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_3$$

をみたす 3 次正方行列 A およびその固有値を求めよ．

(名古屋工業大 2023) (m20232906)

13.25 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(名古屋工業大 2024)

(m20242906)

13.26 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列 A を対角化しなさい.

(2) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次の連立漸化式で定める.

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

$x_1 = 0, y_1 = 1$ のとき, 一般項 x_n と y_n を (1) の結果を用いてそれぞれ求めなさい.

(三重大 2023)

(m20233102)

13.27 点 $(2, -2), (-3, 4)$ をそれぞれ $(6, -6), (-10, 10)$ に移す 1 次変換を行うことができる 2 次の正方

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A は $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を満たす. このときの A^4 を求めなさい. ただし, E は単位行列である.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2023)

(m20233108)

13.28 行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) 行列 X の固有値を求めよ.

(2) 固有値がすべて正の整数になる a を求めよ.

(3) (2) で求めた a の値を用いた場合の行列 X を対角化せよ.

(京都大 2023)

(m20233303)

13.29 本問では, 成分を実数とする実ベクトルおよび実行列を扱う. 3 次の列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$ で表す. ここで, $\mathbf{c}^\top$ はベクトル $\mathbf{c}$ の転置を表す.

ベクトル $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top$ を考える. $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^\top$ に対して写像 f を

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})\mathbf{v}$$

により定める. 以下の設問に答えよ.

(1) ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1 \quad 0 \quad 0)^\top$ に対して $f(\mathbf{e}_1)$ を求めよ.

(2) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{v}$ と $\mathbf{x} - f(\mathbf{x})$ が直交することを証明せよ.

(3) 写像 f は, ある行列 P を用いて $f(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ と表すことができる. この行列 P を求めよ.

- (4) 設問 (3) で定義された P について, 等式 $P^2 = P$ が成り立つことを示せ.
 (5) 設問 (3) で定義された P の 0 でない固有値とその固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(大阪大 2023) (m20233506)

13.30 行列 A とベクトル $\mathbf{u}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める. 次の問に答えよ.

- (1) $\mathbf{u}$ は A の固有ベクトルであることを示せ.
 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ.
 (3) 上記の P に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{-1}A^n P$ を求めよ.
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(神戸大 2023) (m20233801)

13.31 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
 (2) A の固有ベクトルを求めよ.
 (3) A を対角化する行列 P を求め, 対角化を利用して A^3 を計算せよ.

(広島大 2023) (m20234104)

13.32 2 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
 (2) (1) で求めた固有値 a に対応する固有ベクトル $\mathbf{p}$ を一つ与えよ.
 (3) (1) で求めた固有値 a , および (2) で与えた固有ベクトル $\mathbf{p}$ に対し, 方程式

$$(A - aE)\mathbf{q} = \mathbf{p}$$

を満たすベクトル $\mathbf{q}$ を一つ与えよ. ただし, E は 2 次単位行列とする.

- (4) 2 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が上三角行列になる P を一つ与えよ. また, そのときの $P^{-1}AP$ を答えよ.
 (5) 正整数 n に対して, A^n を求めよ.

(広島大 2023) (m20234106)

13.33 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\mathbf{A}$ を対角化する行列 $\mathbf{P}$ を求めよ.

(3) $\mathbf{A}^7 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ を求めよ. また, $a_{11} \times a_{12}$ を計算せよ.

(広島大 2024) (m20244101)

13.34 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A^2 を求めよ.

(2) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) A^{10} を A の対角化を利用して求めよ.

(4) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を A^n を利用して求めよ.

(高知大 2023) (m20234501)

13.35 次の行列 M の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(高知大 2023) (m20234503)

13.36 $A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする. ただし, k は実数とする.

(1) $A(k)$ が正則でないように k の値を定めよ.

(2) 3 が $A(k)$ の固有値であるように k の値を定めよ. またそのときの $A(k)$ の固有値 3 に対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) $A(k)$ が逆行列 $A(k)^{-1}$ をもち, $A(k)$ および $A(k)^{-1}$ のすべての成分が整数となるように k の値を定めよ.

(愛媛大 2023) (m20234606)

13.37 次の行列 A, B と列ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A は固有値 1 をもつ. 1 以外の固有値をすべて求めよ. また, A の固有値を 1 つ選び, その固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(2) 行列 A が対角化可能か否かを示し, もし対角化可能であれば $P\Lambda = AP$ となる正則行列 P と対角行列 Λ の組を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A について, 逆行列 A^{-1} と行列式 $\det(A)$ をそれぞれ求めよ.

(4) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 $\mathbf{x}$ を求めよ.

(5) B^{-1} と $\det(B)$ をそれぞれ求めよ. また, 行列 B の 2023 乗を求めよ.

(佐賀大 2023) (m20234905)

13.38 次の対称行列 A を対角化する直交行列 T を求め、 A を対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2023) (m20234922)

13.39 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

- (1) 固有値が, 2, 3 のとき, a, b を求めなさい.
- (2) (1) のとき, 固有ベクトルを全て求めなさい.
- (3) (1) のとき, A^n を求めなさい.

(佐賀大 2023) (m20234928)

13.40 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問に答えなさい.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.
- (2) 行列 A は対角化可能かどうか調べ, その理由を示しなさい.
- (3) 行列 A のべき乗 A^n を求めなさい.

(熊本大 2023) (m20235201)

13.41 A を, 複素数を成分とする 2 次正方行列とし, λ を複素数とする. E は 2 次単位行列で, $|\lambda E - A|$ は, 行列 $\lambda E - A$ の行列式を表すものとする. このとき, つぎの (1)~(4) に記述されたそれぞれの文章について, その文章が正しいならば「正しい」と, 正しくないならば「正しくない」と答えよ.

- (1) λ が A の固有値ならば, 次の (*) を満たす p_1 と p_2 が存在する.

$$(*) \quad A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (2) $|\lambda E - A| = 0$ を満たす λ は, A の固有値である.
- (3) A の成分がすべて実数であり, λ が A の固有値であるならば, λ はつねに実数である.
- (4) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ならば, λ は A の固有値である.

(宮崎大 2023) (m20235304)

13.42 次の行列 B の固有値ならびに固有ベクトルを求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2023) (m20235406)

13.43 次の行列 A の固有値, 正規化 (単位) 固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2023) (m20235420)

13.44 $A_2 = \begin{pmatrix} -7 & -24 & -18 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(室蘭工業大 2023) (m20235504)

13.45 以下の行列 B の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235511)

13.46 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235514)

13.47 行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- (1) 固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 A を対角化せよ.

(香川大 2023) (m20235706)

13.48 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 6 & -7 & 6 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ.

(東京海洋大 2023) (m20236406)

13.49 ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 実数 x, y, x', y' が

$$x'\boldsymbol{v}_1 + y'\boldsymbol{v}_2 = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \text{ を満たすとき, 行列 } A \text{ を用いて, } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ と書ける.}$$

- (1) A を求めよ.
- (2) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.
- (3) A の固有値をすべて求めよ.
- (4) A の各固有値に対する固有ベクトルをひとつずつ求めよ.

(和歌山大 2023) (m20236501)

14 線形空間など

14.1 線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + 2z \\ x + y + z \\ x + 3y + 4z \\ 2x + 4y + 5z \end{pmatrix}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 実線形空間 $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T\mathbf{x} = 0\}$ の次元と一組の基底を求めよ。
- (2) 実線形空間 $\text{Im}(T) = \{T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の次元と一組の基底を求めよ。

(東北大 2023) (m20230507)

14.2 実線形空間 V を 3 項間漸化式 $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ を満たす数列全体のなす空間として

$$V = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \mid x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n, n = 0, 1, \dots\}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1 \in V$ を

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, -2, \dots), \mathbf{e}_1 = (0, 1, 3, \dots), \mathbf{f}_0 = (1, 1, 1, \dots), \mathbf{f}_1 = (1, 2, 4, \dots)$$

と定める。ここで、 $\mathbf{e}_0 = (1, 0, -2, \dots) \in V$ とは、 $\mathbf{e}_0$ が第 0 項が 1、第 1 項が 0 であるような V の元であることを意味する。 $E = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ および $F = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1\}$ はいずれも V の基底である。 2×2 行列 P で、任意の $\mathbf{x} \in V$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{e}_0 + b\mathbf{e}_1 = c\mathbf{f}_0 + d\mathbf{f}_1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ と表したとき、

$$P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ を満たすものを求めよ。}$$

- (2) $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \in V$ を $T\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in V$ に対応させる線形写像 $T : V \rightarrow V$ の、基底 E に関する表現行列 T_E を求めよ。
- (3) T の基底 F に関する表現行列 T_F を求めよ。
- (4) (3) の結果を用いて、 $\mathbf{f}_0 = (y_n)_{n=0}^\infty$, $\mathbf{f}_1 = (z_n)_{n=0}^\infty$ の一般項はそれぞれ $y_n = 1$, $z_n = 2^n$ であることを示せ。更に、第 0 項が a で第 1 項が b であり、漸化式 $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ を満たす数列 $(x_n)_{n=0}^\infty$ の一般項 x_n を a, b を用いて表せ。

(東北大 2023) (m20230508)

14.3 a, b を 0 でない実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & a & b \\ -b & b & a \end{pmatrix}$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ。
- (2) 行列 A の各固有値に対応する固有空間の基底を求めよ。ただし、 a, b を用いずに基底を表せ。
- (3) 実ベクトル空間 $\left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \text{ は実数} \right\}$ の次元が 2 となるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

(東京工業大 2023) (m20230804)

14.4 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V と, $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ を

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x + 3y - z + 5w = 0 \\ -3x + y - 4z + 9w = 0 \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と定め, $W = \{c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) V の基底と次元を求めよ.

(2) $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in W$ となるための p, q, r に関する条件を求めよ.

(3) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \alpha & \beta \\ 4 & -1 & \beta & \alpha \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ とし, 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^4$) と定める.
 $f(V) \subset W$ が成り立つとき, α, β の値を求めよ.

(電気通信大 2023) (m20231002)

14.5 2 次以下の実係数多項式 $f(x)$ 全体の集合を $\mathbb{R}[x]_2$ とする. $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を $\{x^2, x, 1\}$ とし, $\mathbb{R}[x]_2$ から $\mathbb{R}[x]_2$ 自身への線形写像 F を「 $f(x)$ を微分して x をかける」もの, つまり, $x \frac{df(x)}{dx}$ と定める. このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) 写像 F を基底を用いて表現せよ.

(2) 写像 F の表現行列 A を求めよ.

(3) 写像 F の像空間 $\text{Im } F$ および核空間 $\text{Ker } F$ の次元を求めよ.

(筑波大 2024) (m20241306)

14.6

$$V = \{f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \text{ 複素線形写像} \}$$

とする. V の元 f, g の和 $f + g$, および複素数 α に関するスカラー倍 αf を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす. $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とする.

$i = 1, \dots, n$ に対し, $\hat{e}_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\hat{e}_i \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = x_i \quad (x_1 \cdots x_n \in \mathbb{C})$$

で定める.

A を対角化可能な n 次複素正方行列とし, 写像 $T : V \rightarrow V$ を

$$(T(f))(x) = f(Ax) \quad (f \in V, x \in \mathbb{C}^n)$$

で定める.

(1) $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ は V の基底であることを示せ.

- (2) T は複素線形写像であることを示せ.
 (3) 次の満たす V の基底 $f_1, \dots, f_n$ が存在することを示せ.

T の $f_1, \dots, f_n$ に関する表現行列 B が対角行列である

- (4) B を (3) の対角行列とする. $B = P^{-1}AP$ を満たす n 次複素正則行列 P が存在することを示せ.

(筑波大 2024) (m20241311)

14.7 集合 X に対し, X のべき集合を $P(X)$ と表す. 写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し, 写像 $\hat{f} : P(X) \rightarrow P(Y)$ を

$$\hat{f}(A) = \{y \in Y \mid f^{-1}(\{y\}) \subset A\} \quad (A \in P(X))$$

で定める.

- (1) f が単射であることと $\hat{f}$ が単射であることは同値であることを示せ,
 (2) f が全射であることと $\hat{f}$ が全射であることは同値であることを示せ,
 (3) f が全射であるとする. このとき, $B \in P(Y)$ に対し,

$$f^{-1}(B) = \bigcap \{A \subset X \mid \hat{f}(A) = B\}$$

を示せ.

- (4) f は全射であるとする. X 上に同値関数 $\sim$ を

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \quad (x, y \in X)$$

と定め, $x \in X$ の同値類を $[x]$ とかく. $p : X \rightarrow X/\sim$ を自然な射影とし, $\varphi : X/\sim \rightarrow Y$ を $\varphi([x]) = f(x)$ ($[x] \in X/\sim$) と定めるとき, $\hat{\varphi} \circ \hat{p} = \hat{f}$ を示せ.

(筑波大 2024) (m20241313)

14.8 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & -a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の各問いに答えよ. ただし, a と b はともに実数とする.

- (1) $a = 1, b = 0$ のとき, 行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.
 (2) 行列 A の階数 $\text{rank} A$ を求めよ.
 (3) $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 T を $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$) により定める. $a \neq 0$ かつ $\text{rank} A = 2$ のとき, T の像 $\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3\}$ の 1 組の基底と, T の核 $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ の 1 組の基底を求めよ.

(茨城大 2023) (m20231701)

14.9 X, Y, Z を集合とし, 写像 $f : X \rightarrow Y$ と $g : Y \rightarrow Z$ の合成写像 $g \circ f : X \rightarrow Z$ を考える. このとき, 次の小問に答えよ.

- (1) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射であることを証明せよ.
 (2) $g \circ f$ が全射であり, かつ g が単射ならば, f は全射であることを証明せよ.

(茨城大 2023) (m20231704)

14.10 任意の点 $P(x, y)$ が以下の関数により点 $Q(u, v)$ に写像されるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, x, y は任意の実数とする.

$$u = \frac{2}{\pi}x$$

$$v = y \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

- (1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき、この写像は単射でも全射でもないことを、例を挙げて示せ.
- (2) 点 P が $(0, 1) \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, 1\right) \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, 3\right) \rightarrow (0, 3) \rightarrow (0, 1)$ と移動したとき、点 Q の移動軌跡をグラフに示せ.
- (3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は、点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ.

(山梨大 2023) (m20231803)

14.11 2 部グラフと n 彩色可能グラフは次のように定義されます。

- グラフ $G = (V, E)$ が 2 部であるとは、その頂点集合 V が 2 つの部分集合 L, R に分割され、かつ G の各辺が L の頂点と R の頂点を結んでいるときをいいます。これは数式を用いて以下のように表すことができます。

$L \subseteq V, R = V - L$ のとき、各辺 $(v, w) \in E$ について $v \in L, w \in R$ または $w \in L, v \in R$

- グラフ $G = (V, E)$ が n 彩色可能であるとは、隣接した頂点が異なる色を持つように G の各頂点に n 種類の色から 1 色を割り当てられるときをいいます。これは数式を用いて以下のように表すことができます。

$f: v \rightarrow C$ を頂点から色への写像としたとき (ここで $|C| = n$)、各辺 $(v, w) \in E$ について $f(v) \neq f(w)$

グラフ G について次の 3 つの命題が同値であることを証明しなさい。

- (i) G が 2 彩色可能である。
- (ii) G が 2 部グラフである。
- (iii) G の各閉路の長さは偶数である。

(山梨大 2023) (m20231806)

14.12 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ および、数ベクトル空間 $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える。

- (1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ をすべて求めよ。
- (2) 行列 A の階数を求めよ。また、 $\mathbf{R}^4$ の部分空間 $V = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の次元を求め、 V の基底を 1 組求めよ。ただし、 $\mathbf{0}$ は $\mathbf{R}^4$ の零ベクトルである。
- (3) $\mathbf{R}^4$ の部分空間 $W = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の基底を 1 組求めよ。

(京都工芸繊維大 2023) (m20233401)

14.13 3 次以下の x に関する実数係数 1 変数多項式全体のなす実ベクトル空間を V とする。

写像 $\varphi: V \rightarrow V$ を

$$\varphi(f(x)) = f(x+1) - f(x) \quad (f(x) \in V)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) φ は線形写像であることを示せ。
- (2) V の基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する φ の表現行列を求めよ。

(3) $g(x) = ax^2 + bx + c \in V$ とする. ただし, a, b, c は実定数である. このとき,

$$\varphi(f(x)) = g(x)$$

をみたす $f(x) \in V$ を一つ与えよ.

(4) φ の核 $\text{Ker } \varphi$ を求めよ.

(広島大 2023)

(m20234108)

14.14 $\mathbf{R}^3$ を 3 次元実ベクトル全体とし, $\mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とおく. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ に対し,

$\mathbf{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 2x\}$$

で定義する. また, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とする.

(1) (i) $\mathbf{x}_0 \in V$ であることを示せ.

(ii) $x \in \mathbf{R}^3$ とする. このとき, ある実数 α, β を用いて $x = \alpha x_0 + \beta y_0$ と表すことができることは, $x \in V$ であるための必要十分条件であることを示せ.

(2) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対し. $\mathbf{a}$ の転置により得られる 3 次元ベクトル

${}^t\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ と $\mathbf{b}$ の (行列としての) 積 ${}^t\mathbf{a}\mathbf{b}$ により得られる実数を $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ とおく.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

また, $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{o}$) は, 任意の $x \in V$ に対して $(x, \mathbf{z}_0) = 0$ をみたすとする.

(i) $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in \mathbf{R}^3$ は 1 次独立であることを示せ.

(ii) $A\mathbf{z}_0 = 4\mathbf{z}_0$ が成り立つことを示せ.

(愛媛大 2023)

(m20234607)

応用数学

15 応用数学

15.1 周期 2π の関数 $f(x) = f(x + 2\pi)$ について, 以下の設問に答えなさい.

(1) 次に示す関数

$$g_n(c_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - c_n \cos(nx) \right\}^2 dx$$

を最小とする c_n を求めなさい. ただし, $n = 1, 2, 3, \dots$ とする.

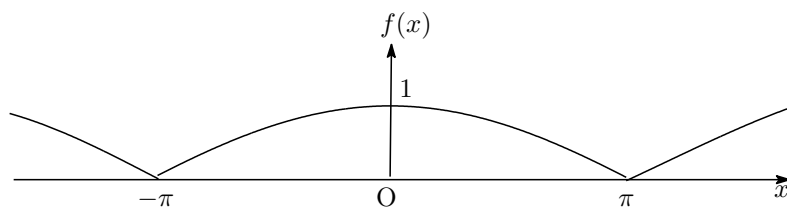
(2) 次の図に示すように, 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \cos \frac{x}{2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

のとき, $f(x)$ は

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos(nx)$$

で表すことができる. 係数 a_0 および a_n を求めなさい.



(北海道大 2023) (m20230104)

15.2 z が複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円上を動くとき, $w = \frac{2iz+1}{iz}$ の軌跡を C とする.

また, $a = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $b = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ とする. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である. 以下の設問に答えなさい.

- (1) C を複素数平面上に描きなさい.
- (2) $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $b = \cos \beta + i \sin \beta$ を満たす α, β を求めなさい.
ただし, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta < 2\pi$ とする.
- (3) $a^n = \frac{2ib^n+1}{ib^n}$ を満たす自然数 n のうち, 最小のものを求めなさい.

(北海道大 2023) (m20230105)

15.3 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定める.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x, x \leq 2y, x+y \leq 3\}$$

- (1) 線形写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+2y \end{pmatrix}$$

と定める. T による D の像 E を求めよ.

- (2) D における重積分

$$I = \iint_D y \, dx dy$$

を求めよ.

- (3) D の境界上を正の向きに辿る経路を ∂D とおくと, ∂D 上の線積分

$$J = \int_{\partial D} xy \, dy$$

を求めよ.

(東北大 2023) (m20230510)

15.4 $z^3 = i$ を満たす相異なる 3 つの複素数 z を求めよ. ただし, 複素数 z の偏角 θ の範囲は任意であるとする. さらに, 複素数 z の偏角 θ の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ に限ることになると答えは, どのように変わるか答えよ. この結果を用いて, 複素数 z の関数 $z^{1/3}$ が一般には 3 価関数であることを説明せよ. 一方, 複素数 z の偏角 θ の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ に限ることになると関数 $z^{1/3}$ は何価の関数になるか理由とともに答えよ.

(お茶の水女子大 2023) (m20230604)

15.5 位置ベクトルを $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ とし, その絶対値を r と表す. また, 微分演算子ベクトル ∇ を $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ と定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (i) ∇r の 3 つの成分を求めよ.

- (ii) $\nabla \cdot \vec{r}$ の値を求めよ.
 (iii) $\nabla \times \vec{r}$ の値を求めよ.

(お茶の水女子大 2023) (m20230606)

15.6 i を虚数単位として、以下の問いに答えよ.

- (1) u を複素数とし、次の漸化式で決まる複素数の数列 (z_n) を考える.

$$z_{n+1} = uz_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ただし、初項 z_0 はゼロでない複素数とする.

- (a) $u = 1 + i$ のとき、 $z_3 = i$ となる初項 z_0 を $x + iy$ (x, y は実数) の形で求めよ.
 (b) $z_0 = i$, $u = -1 + i\sqrt{3}$ のとき、 z_n を $x_n + iy_n$ (x_n, y_n は実数) の形で求めよ. ただし、 x_n, y_n の表式に三角関数を含んではならない.
 (c) $z_{n+4} = -z_n$ と $z_{n+6} = -iz_n$ を同時に満たすすべての u を複素平面上に図示せよ.
 (2) a を複素数として、以下の複素積分を考える.

$$I(a) = \int_C \frac{z - a}{z^4 - 2iz^3 + z^2} dz$$

ここで、積分路 C は、複素平面の原点を中心とする単位円周上を反時計周りに一周するものとする.

- (a) 被積分関数のすべての極と対応する次数と留数を求めよ.
 (b) 積分 $I(a)$ を求めよ.
 (3) 複素平面において原点を通らない直線 L を考える.

- (a) L はある複素数 w によって、以下の等式を満たす複素数 z の集合として表せることを示せ.

$$wz + \bar{w}\bar{z} = 1$$

ここで、 $\bar{w}, \bar{z}$ は、 w, z の複素共役とする.

- (b) 写像 $f(z) = \frac{1}{z}$ によって、直線 L はどのような図形に写像されるか. (a) で用いた w を使って説明せよ.

(東京大 2023) (m20230703)

15.7 複素関数 $f(z) = \frac{e^{-iz}}{(z^2 + 1)^2}$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ.
 (2) 定数 $R > 0$ が (1) で求めた極の絶対値と異なるとき、複素積分 $\int_{|z|=R} f(z) dz$ (積分路は正の向きに 1 周) を求めよ.
 (3) 実軸上での積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を求めよ.

(電気通信大 2023) (m20231006)

15.8 ベクトル場 $\vec{B}(x, y, z) = (xyz^2)\vec{i} + (y^3z)\vec{j} + (-x^2y)\vec{k}$ について、以下を計算せよ. ただし、 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ はそれぞれ x, y, z の各軸方向の単位ベクトルとする.

- (1) $\text{div} \vec{B}$
 (2) $\text{rot} \vec{B}$

- 15.9 (v-1) 次のラプラス変換に関する等式を示しなさい。ただし、関数 $q(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[q(t)]$ を $Q(s)$ で表わすものとする。

$$(1) \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$(2) \mathcal{L}\left[\frac{d^2 q}{dt^2}\right] = s^2 Q(s) - sq(0) - \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0}$$

- (v-2) はじめに、 $\pm q_0[C]$ の電荷がコンデンサーに帯電している。時刻 $t = 0$ でスイッチを閉じて以降の LC 回路におけるコンデンサーに帯電している電荷 $q(t)$ について、ラプラス変換を用いて調べなさい。また、この LC 回路に流れる電流の時間変化について求めなさい。ただし、以下の初期条件をおくこと。

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

(福井大 2023) (m20232413)

- 15.10 次の問いに答えなさい。ただし、 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとする。

- (1) ベクトル $\vec{A}(t), \vec{B}(t)$ が、各々、次式で与えられるとき、 $|d\vec{A}/dt|$ および $|d\vec{B}/dt|$ を求めなさい。

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} \quad \text{ただし, } A_x(t) = t^2, A_y(t) = a \sin \omega t$$

$$\vec{B}(t) = B_x(t)\vec{i} + B_y(t)\vec{j} + B_z(t)\vec{k} \quad \text{ただし, } B_x(t) = t, B_y(t) = be^{-t}, B_z(t) = \cos \omega t$$

ここで、 a, b, ω は定数である。

- (2) ベクトル場 $\vec{A}(x, y, z), \vec{B}(x, y, z)$ が以下のように与えられるとき、 $\vec{A}, \vec{B}$ の発散を求めなさい。また、指定された点 (x, y, z) における発散の値を求めなさい。

$$\vec{A}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad (x, y, z) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{B}(x, y, z) = ae^{(-xz/\lambda)}\vec{i} + be^{(-xy/\lambda)}\vec{j} - cz^2\vec{k}, \quad (x, y, z) = (0, 0, 1)$$

ここで、 a, b, c, ω は定数である。

- (3) それぞれの 3 次元空間のスカラー場 $\Phi(x, y, z)$ の勾配を求めなさい。

$$\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{m/2} \quad \text{ここで, } m \text{ は定数である。}$$

$$\Phi(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)/(4z)}$$

(三重大 2023) (m20233109)

- 15.11 (1) 直角座標系 (x, y, z) における微分可能で、一価連続な場所の任意なスカラー関数 $\psi(\mathbf{r}(t))$ の場において、曲線 $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}_x x(t) + \mathbf{i}_y y(t) + \mathbf{i}_z z(t)$ ($p \leq t \leq q$) を考える。曲線 C 上の点 $P(\mathbf{r} = \mathbf{r}(p))$ から点 $Q(\mathbf{r} = \mathbf{r}(q))$ に至る $\nabla\psi(\mathbf{r}(t))$ の曲線 C に沿った線積分

$$\int_C \nabla\psi(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ。ここで、 ∇ はハミルトンの演算子、 $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ は直角座標系 (x, y, z) における基本ベクトルを示す。

- (2) 直角座標系 (x, y, z) における微分可能で、一価連続な場所の任意なベクトル関数

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_x \mathbf{A}_x + \mathbf{i}_y \mathbf{A}_y + \mathbf{i}_z \mathbf{A}_z \quad \text{において, 次の式が成り立つことを示せ。}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

ここで、 ∇ はハミルトンの演算子、 $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ は直角座標系 (x, y, z) における基本ベクトルである。

- (3) 円柱座標系 (r, φ, z) における微分可能で、一価連続な場所の任意なスカラー関数 Φ において、次の式が成り立つことを示せ。

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = \mathbf{0}$$

なお、円柱座標系 (r, φ, z) における基本ベクトルは、 $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_z$ であり、ハミルトンの演算子は、 $\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$ である。

(大阪大 2023) (m20233501)

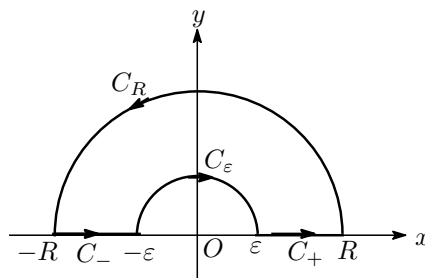
15.12 複素数 $z = x + iy$ とする複素平面を考える。

ただし、 x, y は実数、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする。

ここで右図に示す複素平面上単一閉曲線 C を考え、

以下の経路 $C_-, C_+, C_\varepsilon, C_R$ を定める。

ただし、 ε, R は正の実数とする。



C_- : 実軸に沿って $z = -R$ から $z = -\varepsilon$ に至る経路

C_+ : 実軸に沿って $z = \varepsilon$ から $z = R$ に至る経路

C_ε : 原点を中心とする半径 ε の円弧に沿って時計回りに $z = -\varepsilon$ から $z = \varepsilon$ に至る経路

C_R : 原点を中心とする半径 R の円弧に沿って反時計回りに $z = R$ から $z = -R$ に至る経路

以下の問に答えよ。

- (1) 積分 $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ を考える。 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ とするとき、 $I_- = \int_{C_-} f(z) dz$ と $I_+ = \int_{C_+} f(z) dz$

について $I_- + I_+$ を計算し、 $I_- + I_+ = \boxed{\text{ア}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx$ の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる値または文字を記せ。

- (2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ を求めよ。

- (3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz$ を求めよ。なお、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ であることを用いるとよい。

- (4) (1)~(3) の結果を用いて、(1) で定義した I を計算せよ。

- (5) (1)~(4) と同様に、 $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ を計算せよ。ただし、 $f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}$ とおくとよい。

(大阪大 2023) (m20233503)

15.13 (1) 直交座標系においてスカラー場 $f(x, y, z)$ が定義されるとき、その勾配は

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix} \text{ によって与えられる。いま座標が連続パラメタ } s \text{ の関数として与えられる}$$

とき、微分 $\frac{df(x(s), y(s), z(s))}{ds}$ を f の勾配と位置ベクトル $\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$ を用いて表せ。

- (2) スカラー場が $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ と与えられるとき、その勾配を位置ベクトル

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ を用いて表せ。ただし、原点を除く。}$$

(高知大 2023) (m20234502)

- 15.14 直交座標系において、 x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする。パラメーター θ で表される下記の曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \\ z = \theta \end{cases}$$

- (1) 曲線 C 上の点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ を $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \theta$ を用いて表せ。
- (2) 曲線 C 上の点の接線ベクトル $\mathbf{t}$ を $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \theta$ を用いて表せ。
- (3) 接線ベクトル $\mathbf{t}$ を用いて $0 \leq \theta \leq 1$ の範囲の曲線 C の長さを求めよ。
- (4) $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲の曲線 C に沿う、ベクトル場 $\mathbf{A} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} + (\sin \theta + \cos \theta) \mathbf{k}$ の線積分

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ。ただし、 $\theta = 0$ を始点、 $\theta = \pi$ を終点とする。

(九州大 2023) (m20234703)

- 15.15 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される。以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

$$g(x) = x$$

- (2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

$$h(x) = |\sin x|$$

(九州大 2023) (m20234704)

- 15.16 直角座標系 (x, y, z) において、位置ベクトルとその大きさをそれぞれ $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。スカラー関数 $f = e^{-r^2}$ およびベクトル関数 $\mathbf{A} = f\mathbf{r}$ が与えられているとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ である。

- (1) ∇f (= grad f) を求めよ。
- (2) $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (= div $\mathbf{A}$) を求めよ。
- (3) $\nabla \times \mathbf{A}$ (= rot $\mathbf{A}$) を求めよ。
- (4) 原点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球の表面を S とし、 S を境界とする球内部の領域を V とする。体積分 $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$ を求めよ。

(室蘭工業大 2023) (m20235505)

確率統計

16 確率統計

- 16.1 (1) あるパーティーにおいて、参加者のうち、 $\frac{4}{5}$ がマスクをしていて、 $\frac{1}{5}$ がマスクをしていなかった。

マスクをしていた人の感染の確率は $\frac{1}{10}$, マスクをしていなかった人の感染の確率は $\frac{3}{5}$ であった.
後日の検査で感染が確認された人がマスクをしていた確率を求めよ.

- (2) 次の確率密度関数 $f(x)$ で与えられる確率分布の期待値 (平均値) を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x} & (1 \leq x) \\ 0 & (x < 1) \end{cases}$$

- (3) ある工業製品の重量の確率分布が, 平均 m , 標準偏差 4.6 の正規分布であるとする. 工業製品から 100 個を無作為抽出して重量を調査したとき, その平均は 65.0 であった. m について信頼度 95 % の信頼区間を求めよ. 信頼区間の数値は小数点第 2 位を四捨五入して, 小数第 1 位までで答えよ. ここで, 確率変数 Z が標準正規分布に従うとき, $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるとする.

(岩手大 2023) (m20230309)

16.2 以下の調査結果を踏まえ, (1)~(4) に答えよ.

表 調査結果 (ランダムサンプリングによる)

被験者 ID	歩数 (/日) ^a	住居 ^b	運動時間 (/週) ^b
01	8801	寮	90 分以上
02	8334	寮	90 分以上
03	7064	寮	45 分未満
04	10783	寮	90 分以上
05	7051	寮	45~90 分
06	8752	寮	45 分未満
07	10367	自宅	90 分以上
08	9893	自宅	45 分未満
09	8445	自宅	45~90 分
10	9841	自宅	45 分未満
11	11714	自宅	90 分以上
12	10235	自宅	45~90 分

^a 活動量計デバイスを用いた測定値.

^b 被験者によるアンケート調査項目に対する回答.

- (1) 調査結果に含まれる変数それぞれについて, (連続変数, 順序変数, 名目変数) のどれに該当するか, 種類を判別せよ. なお, 「運動時間」 については判別した理由も説明すること.
- (2) 被験者 12 名の「歩数」の中央値を求めよ.
- (3) 「運動時間」の調査項目 (45 分未満, 45~90 分, 90 分以上) に対する回答結果に基づいて 3 グループに分け, それぞれのグループでの「歩数」の平均値を求めたとする. 平均値のみを比較して 3 グループの「歩数」に有意な差があるかどうかを判定することは可能か. 可能か否かについて, 理由とともに答えよ.
- (4) 住居 (寮, 自宅) の違いが「歩数」に有意な差を与えていると仮説を立てた. この仮説を検証するためには, どのように統計的な検定を行えばよいかを説明せよ.

(お茶の水女子大 2023) (m20230610)

16.3 表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1-p$ であるコインを何回か投げ, 表が出るたびにスコアに 1 を加え, 裏が出るたびにスコアから 1 を減じるゲームをおこなう. コインを 1 回投げてスコアを更新することを 1 回の試行と呼ぶことにする. ここで, n 回 ($n = 1, 2, \dots$) の試行後のスコアを S_n とし, xy

平面上の点 $(0, S_0), (1, S_1), \dots, (n, S_n)$ を順に結ぶ折れ線を考える。ただし、 S_0 はゲーム開始時に保有する初期スコアとする。

(1) $S_0 = 0$ として、コインが順に「裏, 表, 表, 表, 裏, 表, 裏, 表, 表, 裏」と出た場合の折れ線の概形を図示せよ。

(2) $S_0 = 0, n = 4$ として、折れ線が点 $(4, 2)$ に到達する確率を p を用いて表せ。

これ以降は $p = \frac{1}{2}$ とし、また k, m をそれぞれ $k + m \leq n$ を満たす非負の整数とする。

(3) $S_0 = -k$ として、折れ線が点 (n, m) を通る確率を k, m, n を用いて表せ。

(4) $S_0 = k$ として、折れ線が 1 回以上 x 軸と交差あるいは接触してから点 (n, m) を通る確率が (3) で求めた確率と等しいことを示せ。

ここで $S_0 = 0$ として、コインを $2n$ 回投げたあと、 $S_{2n} = 2s$ である事象を A_{2s} (s は $0 \leq s \leq n$ を満たす整数)、 $0 < j \leq 2n$ を満たすすべての整数 j について $S_j \geq 0$ である事象を B とする。

(5) 事象 A_{2s} が生じる確率 $P(A_{2s})$ を n, s を用いて表せ。

(6) 事象 A_{2s} と事象 B が同時に生じる確率 $P(A_{2s} \cap B)$ を n, s を用いて表せ。

(7) 事象 B が生じる確率 $P(B)$ を n を用いて表せ。

(東京大 2023) (m20230702)

16.4 次のデータは、 A 県と B 県のバス路線をそれぞれ 1 つ選び、始点から終点までの運行にかかった時間を記録したものである (単位: 分)。

A 県のデータ : 75, 93, 95, 80, 75, 77, 83, 92, 80, 85

B 県のデータ : 82, 87, 82, 84, 82, 90, 79, 82

上記のデータはそれぞれ正規分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2), N(\mu_B, \sigma_B^2)$ に従うと仮定する。必要に応じて付表を参照しつつ、以下の各問に答えよ。

(1) 各県のデータを用いて標本分散 s_A^2, s_B^2 をそれぞれ求めよ。

(2) A 県の母分散 σ_A^2 の 95 % 信頼区間を求めよ。計算結果は小数第 2 位で四捨五入して答えること。

(3) 両県のデータを用いて、有意水準 5 % で等分散検定をせよ。

付表 1: 自由度 m の χ^2 分布において、右側裾野の確率が α となる臨界値

付表 2: 自由度 (m, n) の F 分布において、右側裾野の確率が 0.05 となる臨界値

付表 3: 自由度 (m, n) の F 分布において、右側裾野の確率が 0.025 となる臨界値

がついている。

(筑波大 2024) (m20241309)

16.5 2 つのプロジェクト P_1, P_2 の投資収益率はそれぞれ確率変数 X_1, X_2 で表され、プロジェクト

P_i ($i = 1, 2$) の投資収益率の期待値は $E(X_i) = m_i$ 、分散は $V(X_i) = \sigma_i^2$ ($\sigma_i > 0$)、2 つのプロジェクトの投資収益率の共分散は $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}$ であるとする。2 つのプロジェクトへの投資金額割合が $a_1, a_2 \geq 0$ ($a_1 + a_2 = 1$) のとき、その投資の組み合わせ (以下、ポートフォリオ) の収益率は $R = a_1X_1 + a_2X_2$ である。以下の各問に答えよ。

(1) 共分散 $Cov(X_1, X_2)$ の定義式を示せ。

(2) ポートフォリオの収益率 R の期待値と分散を a_i, m_i, σ_i ($i = 1, 2$)、 σ_{12} を用いて表せ。

以降では、ポートフォリオのリスクを収益率 R の分散で表すことにする。

- (3) 相関関係 $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = -1$ のとき、ポートフォリオのリスクをゼロとするための a_1 と a_2 の比を求めよ.
- (4) 相関関係 $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = 1$, かつ, $\sigma_1 > \sigma_2$ のとき, ポートフォリオのリスクが, プロジェクト P_2 に単独で投資する場合よりも小さくできないことを示せ.

付表 1: 自由度 m の χ^2 分布において, 右側裾野の確率が α となる臨界値

付表 2: 自由度 (m, n) の F 分布において, 右側裾野の確率が 0.05 となる臨界値

付表 3: 自由度 (m, n) の F 分布において, 右側裾野の確率が 0.025 となる臨界値がついている.

(筑波大 2024) (m20241310)

16.6 次の文章を読んで, (1), (2), (3), (4) に答えよ.

われわれは考えている状況を理解しやすくするために, しばしば図を用いる. 例えば場合分けを分かりやすくするための樹形図や, コンピューターで行う処置を図示したフローチャートなどがある.

今, 1 枚のコインを何回か投げて, 表と裏が出る回数を考える. 表が出た回数が a であり, 裏が出た回数が b である状態を (a, b) と表すことにする. まだ 1 回もコインを投げていない状態は $(0, 0)$ であり, 1 回投げて表が出たならば状態は $(1, 0)$ に変化する.

図 1 は, コインを 2 回投げるまでの状態の変化を図示したものである. この図では左端にまだコインを投げていない状態 $(0, 0)$ があり, 右上へ向かう矢印は表が出たこと, 右下へ向かう矢印は裏が出たことを表し, 矢印の先にその後の状態が描かれている

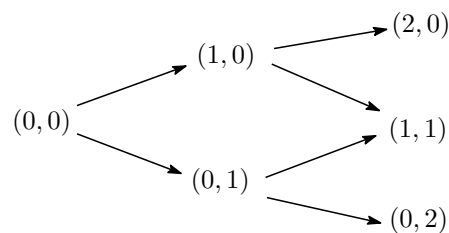


図 1 コインを 2 回投げるまでの状態の変化

A さんと B さんの二人が同じコインを交互に投げ, 先に表が 3 回出たら A さんの勝ち, 先に裏が 3 回出たら B さんの勝ちというゲームを行うとする.

- (1) このゲームの勝敗が決まるまでの状態の変化を表す図を, 図 1 を参考にして描け.
- (2) このような図を使うことの利点や欠点について, 自分の考えを述べよ.
- (3) 実はこのコインは表の出る確率が $\frac{2}{3}$ であり, 裏の出る確率が $\frac{1}{3}$ である. このとき, コインを 2 回投げ終わったときに
 - (a) 状態 $(2, 0)$ になる確率
 - (b) 状態 $(1, 1)$ になる確率
 - (c) 状態 $(0, 2)$ になる確率

をそれぞれ求めよ. 解答に至った理由を説明すること.

- (4) コインの表の出る確率が $\frac{2}{3}$ であり, 裏の出る確率が $\frac{1}{3}$ である場合に, B さんが勝つ確率を求めよ. 解答に至った理由を説明すること.

(群馬大 2023) (m20231501)

16.7 目が「-1」,「0」,「1」,「2」にふられた4面体のサイコロを考える.

ただし、「-1」,「0」,「1」の出目は同じ確率で出現するが、「2」の出目は他の2倍の確率で出現するものとする.

- (1) このサイコロを1回振ったときの出目の期待値と分散を求めよ.
- (2) このサイコロを n 回振ったときの出目の合計値の期待値と分散を求めよ.
- (3) このサイコロを2回振ったときの出目を掛け合わせた積の値の確率分布をグラフに示せ. ただし, 範囲は-4から5の間とする.

(山梨大 2023) (m20231802)

16.8 2個の赤球と18個の白球が入った袋から, 太郎, 花子がこの順で1回ずつ球を取り出すとき, 太郎が赤球を取り出す事象を T , 花子が赤球を取り出す事象を H とします. なお, 取り出した球は袋に戻さないものとします. 次の問いに答えなさい.

- (a) 太郎が赤球を取り出した後, 花子も赤球を取り出す確率 $P(T \cap H)$ を求めなさい.
- (b) 太郎が赤球を取り出す確率 $P(T)$ と花子も赤球を取り出す確率 $P(H)$ は等しいことを証明しなさい.

(山梨大 2023) (m20231805)

16.9 二つの袋A, Bがある. Aの袋には赤球7個と白球3個が入っており, Bの袋には赤球3個と白球7個が入っている. 下の問いに答えなさい.

- (1) Aの袋から2個の球を同時に取り出すとき, どちらの球も赤球である確率を求めなさい.
- (2) Bの袋から2個の球を同時に取り出すとき, どちらの球も赤球である確率を求めなさい.
- (3) A, Bの袋のうち一つの袋を無作為に選び, 選んだ袋から2個の球を同時に取り出すとき, どちらの球も赤である確率を求めなさい.
- (4) A, Bの袋のうち一つの袋を無作為に選ぶ. 選んだ袋から同時に取り出した2個の球がどちらも赤球であったとき, 選ばれた袋がAである条件付き確率を求めなさい.

(長岡技科大 2023) (m20232101)

16.10 (1) 赤箱が2個, 青箱が3個ある. 赤箱にはAと書いた玉が4個とBと書いた玉が3個, 青箱にはAと書いた玉が5個とBと書いた玉が2個入っている. いずれかの箱を1つ選び, その箱から玉を1個取り出す. 取り出した玉がBと書いた玉であったとすれば, その玉が赤箱から取り出されたものである確率を求めよ.

- (2) 各面の目が1, 2, 3, 4, 5, 6である正六面体のサイコロがある. このサイコロを3回振ったとき, 1回も6の目がでなかったという条件のもとで, 出た目の合計が14以上になる確率を求めよ. それぞれの目が出る確率は同様に確からしいものとする.

(福井大 2023) (m20232409)

16.11 表が出る確率が $1/3$, 裏が出る確率が $2/3$ であるコインを3枚同時に投げる. このときの表が出る枚数の期待値 E および分散 V を求めよ.

(福井大 2023) (m20232410)

16.12 赤玉3個, 青玉3個, 白玉4個が入った袋がある. 次の問いに答えよ. ただし, 答えが分数になる場合は, 既約分数で答えよ.

- (1) 袋から1個ずつ順に3個の玉を取り出す. ただし, 取り出した玉はもとに戻さない, このとき, 取り出した3個の玉が赤, 青, 白の順で取り出される確率を求めよ.

- (2) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき、取り出された 3 個の玉がすべて同じ色である確率を求めよ.
- (3) 赤玉を 1 点, 青球を 2 点, 白玉を 3 点として, 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき, 取り出された 2 個の玉の点数の合計が偶数である確率を求めよ.

(豊橋技科大 2023) (m20232704)

- 16.13** 図 1 のように, 四つのマスが円状に並べられた双六を一人で行う. 最初, 駒は ① に置かれている. 1 から 6 の目があるさいころを振り, 1 から 4 の目が出たとき右回りに一つ進み, 5 または 6 の目が出たとき左回りに一つ進む. 1 から 6 のさいころの目は等しい確率で出るものとする. n 回さいころを振ったときに駒が ① のマスに居る確率を $a(n)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $a(1), a(2)$ を求めよ.
- (2) $a(n)$ を求めよ.

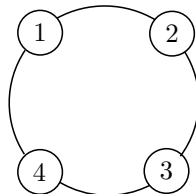


図 1 : 双六

(名古屋大 2023) (m20232804)

- 16.14** 以下の 2 つのゲームに関して設問に答えよ.

ゲーム A : 5 枚の 100 円硬貨を同時に投げたとき, 表が出た硬貨がもらえる.

ゲーム B : 1 つのサイコロを投げて 3 以上の目が出るとその目の数だけ 100 円硬貨がもらえ,
2 以下の目が出るとその目の枚数の 100 円硬貨を支払う.

- (1) ゲーム A で k 枚表が出る確率を求めよ.
- (2) ゲーム A とゲーム B を一度ずつ行ったときの期待値 (受け取る金額) をそれぞれ求めよ.

(三重大 2023) (m20233107)

- 16.15** (1)~(4) に答えよ. なお, N, m, n は正の整数とする.

- (1) N 人中 m 人が病気であるとした場合, この N 人から一度に n 人を選んだとき, 1 人以上が病気である確率を求めよ.
- (2) 20 人中 2 人が病気であるとした場合, この 20 人から一度に n 人を選んだとき, 1 人以上が病気である確率を 0.8 以上としたい. n の最小値を求めよ.
- (3) 病気であるかどうかを検査する場合, 実際には病気でない人が誤って陽性と判定されることがある.

- ・ 有病率 r : 病気である人の割合
- ・ 感度 x : 病気である人を正しく陽性と判定する確率
- ・ 特異度 y : 病気でない人を正しく陰性と判定する確率
- ・ 陽性的中率 z : 陽性と判定された人が実際に病気である確率

と定義した場合, z を r, x, y を用いて表せ.

- (4) (3) において r を 0.1 とした場合, z が 0.9 以上になる x, y の範囲を xy 平面上に図示せよ.

(京都大 2023) (m20233306)

- 16.16** (1) あるコインを投げる試行について, 以下の問いに答えよ.

- (1-1) コインを 5 回投げて裏が多くても 1 回出たとき、このコインは裏が出にくいと言えるか。有意水準 5 % で検定せよ。
- (1-2) コインを n 回投げて裏が多くても 1 回出たとき、このコインが有意水準 5 % で裏が出にくいと言えるような n の最小値を求めよ。
- (2) 連続確率変数 X は、ある値 x を取り、かつ、確率密度関数 $f_X(x)$ をもつ確率分布に従う。このとき、以下の問いに答えよ。

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (x < 0, \pi < x) \end{cases}$$

- (2-1) X の平均値と分散を求めよ。
- (2-2) 連続確率変数 Y は、ある値 y を取る。 $Y = \sqrt{X}$ と定義するとき、 Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。

(大阪大 2023) (m20233504)

- 16.17** $0 < p < 1$ とする。成功確率 p の試行を独立に繰り返す。初めて失敗したときに終了する。初めて失敗するまでに成功した試行の回数を表す確率変数を X とすると、 X の確率分布は次式で与えられる。

$$P(X = k) = p^k(1 - p), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

以下の設問に答えよ。

- (1) 期待値 $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k)$ を求めよ。
- (2) n, m を任意の非負整数とする。事象 $X \geq n$ が起こったとき事象 $n \leq X \leq n + m$ が起こる条件付き確率について、次の等式を証明せよ。
- $$P(n \leq X \leq n + m \mid X \geq n) = P(0 \leq X \leq m) \quad (*)$$
- (3) 設問 (2) は $(*)$ の左辺の条件付き確率が n に依存しないことを示す。このことが成り立つ理由を $(*)$ を用いずに文章で説明せよ。
- (4) $\mu > 0$ とする。数列 $\{q_k\}$ に関する次の条件を考える。

$$q_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kq_k = \mu \quad (**)$$

$(**)$ を満たす数列 $\{q_k\}$ について、 $H = -\sum_{k=0}^{\infty} q_k \log q_k$ と定義する。 $\{q_k\}$ を動かすとき、 H の最大値を求めたい。

- (a) $(**)$ を満たす任意の数列 $\{q_k\}, \{q'_k\}$ について次の不等式が成立することを証明せよ。

$$-\sum_{k=0}^{\infty} q_k \log q_k \leq -\sum_{k=0}^{\infty} q_k \log q'_k$$

必要ならば、不等式 $\log x \leq x - 1$ ($x > 0$) を証明せずに用いてよい。

- (b) H の最大値および最大値を与える $\{q_k\}$ を求めよ。

(大阪大 2023) (m20233507)

- 16.18** ゲーム A は、1 つのサイコロを投げたとき 4 以上の目が出るとその目の枚数だけの 100 円硬貨をもらえ、3 以下の目が出るとその目の枚数だけの 100 円硬貨を支払う。

ゲーム B は、5 枚の硬貨を同時に投げたとき、表の出た硬貨をもらえる。

A と B の、どちらのゲームに参加する方が有利かを期待金額から説明しなさい。

- (1) ゲーム A の期待金額を求めなさい.
- (2) ゲーム B の期待金額を求めなさい.
- さらに, どちらのゲームに参加する方が有利かを記述しなさい.

(山口大 2023) (m20234304)

- 16.19** (1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ が, $E(X) = 12$, $V(X) = 5$ であるとする. このとき, $Y = -3X + 7$ で定められる確率変数 Y について, Y の期待値 $E(Y)$, 分散 $V(Y)$ および標準偏差 $\sigma(Y)$ を求めよ.

- (2) a を定数とし, ある連続的な確率変数の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = \begin{cases} a & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } 1 < x) \end{cases}$ であるとする. このとき, a の値を求めよ.

(宮崎大 2023) (m20235301)

- 16.20** (1) 3つの箱 A , B , C があり, それぞれ「あたりボール」と「はずれボール」が以下の表に示す個数入っている.

箱	「あたりボール」の数	「はずれボール」の数
A	2	10
B	4	8
C	6	3

箱 A , B , C から1つ選び, その箱からボールを1個取り出すものとする. このとき, 箱 A , B , C が選ばれる確率をそれぞれ 0.3, 0.3, 0.4 とする.

- (a) 取り出したボールが「あたりボール」である確率を求めよ.
- (b) 取り出したボールが「あたりボール」である場合に, そのボールが箱 B に入っていた確率を求めよ.
- (2) 平均 1, 分散 1 の2つの確率変数を X , Y とし, X と Y の共分散を r とする, また, 確率変数 Z を $Z = X - rY$ と定義する.
- (c) Z の平均および分散を求めよ.
- (d) Z と Y の共分散を求めよ.

(東京都立大 2023) (m20235902)

- 16.21** 2つの変数 x , y があって, これを実際に測定したところ n 組の結果 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) を得たとする. このとき, $y = ax + b$ がこれらの結果に最もよく適合するように最小2乗法によって a , b を求めたい. なお, 最小2乗法とは, 「想定する関数が測定値に対してよい近似となるように, 残差 (測定値 - 推定値) の2乗和を誤差関数 $f(a, b)$ として, それを最小とするような係数を決定する方法」である.

- (1) 誤差関数 $f(a, b)$ を示せ.
- (2) a , b を求めるための連立方程式を偏微分を用いて導け.

(宇都宮大 2023) (m20236106)

- 16.22** 「対応のある t 検定」の目的を述べ, 次の用語 (帰無仮説, 検定統計量, 有意水準) をすべて用いて大まかな手順について述べよ.

(宇都宮大 2023) (m20236107)